УДК 517.977.56
ГРНТИ 27.31.15

ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО ПОТОКА В СЕТЕПОДОБНОЙ ГИДРОСЕТИ

О.Р. БАЛАБАН
ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)
М.Л. ФЕДЮНИН, кандидат технических наук
ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)
С.А. ГАРШИН
ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)

Рассматривается линеаризованный аналог классической задачи Навье-Стокса. Целью исследования является анализ устойчивости программного течения гидравлического потока при формировании разного типа аппроксимационных соотношений для численного отыскания решений. В центре исследования находится часто встречаемый на практике случай ламинарного течения гидравлического потока. На практике перенос тепла по всем элементам гидросети при гидравлическом процессе наблюдается в виде нагрева (охлаждения) гидросистемы. Это означает, что необходимо учитывать неизотермическую составляющую при анализе гидродинамического процесса.

Ключевые слова: ламинарное течение вязкой жидкости, линеаризованная система Навье-Стокса, аппроксимация, устойчивость, метод Фаедо-Галеркина.

THE HYDRAULIC FLOW SUSTAINABILITY ISSUES IN A NETWORK-HYDRAULIC NETWORK

O.R. BALABAN
MESC AF «N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy» (Voronezh)
M.L. FEDYUNIN, Candidate of Technical Sciences
MESC AF «N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy» (Voronezh)
S.A. GARSHIN
MESC AF «N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy» (Voronezh)

The linearized analogue of the classical Navier-Stokes problem is considered. The aim of the study is to analyze the stability of the program flow of the hydraulic flow during the formation of various types of approximation ratios for the numerical search for solutions. At the center of the study is the frequent case of laminar flow of hydraulic flow in practice. In practice, heat transfer across all elements of the hydraulic network during the hydraulic process is observed in the form of heating (cooling) of the hydraulic system. This means that it is necessary to take into account the non-isothermal component when analyzing the hydrodynamic process.

Keywords: laminar flow of a viscous fluid, linearized Navier-Stokes system, approximation, stability, Faedo-Galerkin method.

Введение. В технологических задачах прикладного характера особый интерес исследователей вызывают гидродинамические процессы, осложненные термальным эффектом, а именно выделением (поглощением) энергии, синтезирующей явление формирования тепловых процессов и, как следствие, переноса теплоты по всем элементам гидросети при гидродинамическом процессе. На практике при транспортировке вязкой среды по гидросети это наблюдается в виде нагрева (охлаждения) гидросистемы. Последнее означает: необходимо учитывать неизотермическую составляющую при анализе гидродинамического процесса.

В задачах анализа течений вязких жидкостей система уравнений вида:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} - \nu\Delta Y + \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial Y}{\partial x_i} + \nabla p = f, \tag{1}$$

$$divY = 0\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Y}{\partial x_i} = 0\right), \tag{2}$$

где неизвестными являются функции $Y(x,t)$ и $p(x,t)$, является системой Навье-Стокса [1, с. 77]. Здесь $Y = \{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ – векторная, p – скалярная функции, $x \in \mathrm{R}^n$, описывающие перемещение несжимаемой вязкой жидкости с коэффициентом вязкости ν, Y – вектор скоростей, p – давление в гидросистеме ($\nabla p = grad\, p$ – градиент давления), $\sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial Y}{\partial x_i}$ – нелинейная компонента (конвективная составляющая). Ниже изучается случай, когда последняя отсутствует и система (1), (2) становится линейной (линеаризованная система Навье-Стокса).

Актуальность. Математическое описание гидродинамических процессов в трубопроводах, имеющих сетеподобную структуру, является целью исследований последних десяти лет. Основная сложность состоит в понимании (а, следовательно, формализации) динамики процесса в так называемых «узловых» местах гидросистемы, т. е. в местах сочленения линейных фрагментов сети трубопровода. Правильное представление этого процесса и правильное математическое описание его – это необходимое условие для адекватного математического анализа гидродинамического процесса во всей гидросети. К указанной проблеме следует присоединить еще одну, состоящую в отыскании условий, в том случае, если система является устойчивой к малым изменениям исходного состояния. Последнее является базовым свойством при построении аппроксимационных соотношений для математических формализмов, лежащих в основе математических моделей гидродинамики в гидросетях. Рассмотрению указанных проблем посвящена представляемая работа.

Основные обозначения, понятия и определения. Пусть $\Im \subset \mathrm{R}^n$ – ограниченная сетеподобная область, представляющая собой объединение открытых подобластей $\Im_k$ с разделяющими смежные подобласти поверхностями $S_l : \Im = (\bigcup_k \Im_k) \bigcup (\bigcup_l S_l)$, $\partial\Im$ – граница области $\Im$. Введем понятие «узловое место» (далее ξ) – место «склейки» прилежащих друг к другу подобластей: $\xi = \bigcup_l S_l(\xi)$.

Линеаризованная система Навье-Стокса определяется в сетеподобной области $\Im_T = \Im \times (0,T)$ ($T < \infty$) соотношениями вида:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} - \nu\Delta Y + \nabla p = f, \tag{3}$$

$$divY = 0, \tag{4}$$

причем в узловых местах ξ имеют место соотношения (условия сопряжения [2, 3]):

$$Y|_{S_l^-(\xi)} = Y|_{S_l^+(\xi)}, \tag{5}$$

$$\sum_l \frac{\partial Y}{\partial n_l^-}\Big|_{S_l^-(\xi)} + \sum_l \frac{\partial Y}{\partial n_l^+}\Big|_{S_l^+(\xi)} = 0, \tag{6}$$

где $S_l^-(\xi)$ и $S_l^+(\xi)$ – поверхности, относящиеся к $S_l(\xi)$, фиксированные направлениями внешней и внутренней нормалями n_l^-, n_l^+. Присоединяя начальные условия:

$$Y(x,0) = Y_0(x),\ \ x \in \Im, \tag{7}$$

при $t = 0$ и краевые условия на границе $\Im_T$:

$$Y|_{\partial\Im} = 0, \tag{8}$$

получаем начально-краевую задачу (3)-(8) для отыскания функций $Y(x,t)$ и $p(x,t)$ в замкнутой сетеподобной области:

$$\overline{\Im}_T = (\Im \cup \partial\Im)\times[0,T]. \tag{9}$$

Пусть пространство $\mathrm{H}^1(\Im)$, элементами которого являются $\mu \in L_2(\Im)^n$, имеют обобщенную производную $\dfrac{\partial\mu}{\partial x} \in L_2(\Im)^n$ ($\dfrac{\partial\mu}{\partial x_i} \in L_2(\Im)$, $i = \overline{1,n}$). Пространство $\mathrm{H}^1(\Im)$ снабжено нормой:

$$\|\mu\|_{\mathrm{H}^1(\Im)} = \left(\|\mu\|^2_{L_2(\Im)} + \left\|\frac{\partial\mu}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Im)}\right)^{1/2} \tag{10}$$

и является гильбертовым пространством со скалярным произведением:

$$(\mu,\rho)_{\mathrm{H}^1(\Im)} = (\mu,\rho) + \left(\frac{\partial\mu}{\partial x}, \frac{\partial\rho}{\partial x}\right). \tag{11}$$

Определим пространство $V_0^1(\Im)$ как замыкание в норме $\mathrm{H}^1(\Im)$ множества элементов $\mu \in \mathsf{D}(\Im)^n$, удовлетворяющих условиям сопряжения:

$$\sum_l \frac{\partial\mu}{\partial n_l^-(\xi)}\Big|_{S_l^-(\xi)} + \sum_l \frac{\partial\mu}{\partial n_l^+}\Big|_{S_l^+(\xi)} = 0, \tag{12}$$

где $V_0^1(\Im)$ – подпространство функций из $\mathrm{H}^1(\Im)$, «удовлетворяющих условиям сопряжения» во всех узловых местах ξ области $\Im$ и «равных нулю» на $\partial\Im$.

Пространство $V_0^1(\Im)$ можно определить как замыкание в норме $\mathrm{H}^1(\Im)$ множества элементов $\mu \in \mathsf{D}_\circ(\Im)^n \subset \mathsf{D}(\Im)^n$.

Далее рассмотрим билинейную форму:

СОДЕРЖАНИЕ

$$\rho(u,v)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Im}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}dx, \tag{13}$$

на функциях u,v,ω, для которых сходятся интегралы в представлении данной формы.

Замечание 1. Если $Y\in V_0^{1,0}(\Im_T)$, то $Y=0$ на $\partial\Im$, то есть соотношения (5), (6), (8) следует понимать как условия принадлежности Y пространству $V_0^{1,0}(\Im_T)$. Равенство (7) поменяется почти всюду на $\Im$.

Определение 1. Слабым решением задачи (3)-(8) называется совокупность функций $\{Y,p\}$, для которой функция $Y(x,t)$ удовлетворяет интегральному тождеству:

$$\begin{gathered}(Y(x,t),\eta(x,t))-\int_{\Im_t}Y(x,\tau)\frac{\partial\eta(x,\tau)}{\partial\tau}dxd\tau+\nu\int_0^t\rho(Y,\eta)d\tau=\\=(Y_0(x),\eta(x,0))+\int_{\Im_t}f(x,\tau)\eta(x,\tau)dxd\tau\end{gathered} \tag{14}$$

для любых $t\in[0,T]$ и любых достаточно гладких функций $\eta(x,t)$ (для простоты изложения здесь не приводятся классы функций $Y(x,t)$, $p(x,t)$ и $\eta(x,t)$, они аналогичны используемым в исследованиях, представленных в работах [2–4]).

Теорема 1. Начально-краевая задача (3)-(8) однозначно слабо разрешима при произвольном (конечном) $T>0$.

В доказательстве существования слабого решения используется метод Фаедо-Галеркина со специальным базисом: рассматривается спектральная задача (задача на собственные значения) в области $\Im$ $-\nu\Delta U=\lambda U$, $U|_{\partial\Im}=0$ определения множества обобщенных собственных функций $\{U_i(x)\}_{i\geq 1}$ и ему соответствующему множеству собственных значений $\{\lambda_i\}_{i\geq 1}$. При этом устанавливаются свойства собственных значений и обобщенных собственных функций, аналогичные описанным в работе [3]:

1. Собственные значения вещественные, неотрицательные и имеют конечную кратность.
2. Обобщенные собственные функции образуют ортогональный базис в пространстве $L_2(\Im)^n$ ($L_2(\Im)^n$ – пространство суммируемых с квадратом функций, определенных в области $\Im$).

Первая компонента $Y(x,t)$ решения задачи (3)-(8) является слабым пределом последовательности приближений $Y_m(x,t)$ вида:

$$Y_m(x,t)=\sum_{i=1}^{m}g_{im}(t)U_i(x), \tag{15}$$

где коэффициенты $g_{im}(t)$ – скалярные функции, абсолютно непрерывные на $[0,T]$. Вторая компонента $p(x,t)$ решения задачи (3)-(8) определяется как произвольный элемент из области допустимых давлений, присущих гидравлической системе $\overline{\Im}$. Обоснование представленных рассуждений осуществляется посредством построения априорных оценок нормы решения задачи (3)-(8) и последующим переходом к пределу при $m\to\infty$, т.е. установлением слабой компактности последовательности $\{Y_m(x,t)\}_{m\geq 1}$ (см. аналогичные рассуждения, приведенные в работе [2]).

СОДЕРЖАНИЕ

Замечание 2. Доказательство теоремы содержит утверждение относительно слабого решения $Y(x,t)$: функция $Y(x,t)$ обладает производной $\dfrac{\partial Y(x,t)}{\partial t}$ класса $L_2(0,T;V_0^1(\Im))$ по переменной t, обусловленное представлением элементов $Y_{m_k}(x,t)$ подпоследовательности $\left\{Y_{m_k}\right\}_{k\geq 1}$ для предельной функции $Y(x,t)$.

Следствие. Слабое решение начально-краевой задачи (3)-(8) непрерывно зависит от исходных данных $f(x,t)$ и $Y_0(x)$. Отсюда и из утверждения теоремы 1 следует корректность по Адамару задачи (3)-(8).

Замечание 3. Нетрудно показать, что коэффициенты $g_{im}(t)$ в представлении приближений $Y_m(x,t)$ можно выразить через экспоненты $e^{-\lambda_i t}$ и доказать равномерную и абсолютную сходимость ряда $Y_m(x,t)=\sum\limits_{i=1}^{\infty} g_{im}(t)U_i(x)$ в области $\Im_\infty = \Im\times(0,\infty)$.

Устойчивость системы (3)-(4). Рассмотрим систему (3)-(4) на множестве $\Im_\infty$. Обозначим через $\Im_{t_0,t}=\Im_0\times(t_0,t)$, $\partial\Im_{t_0,t}=\partial\Im\times(t_0,t)$ ($0<t_0<t<\infty$), $\Im_{t_0,\infty}=\Im_0\times(t_0,\infty)$, $\partial\Im_{t_0,\infty}=\partial\Im\times(t_0,\infty)$; ясно, что $\Im_{t_0,t}\subset\Im_t$.

Будем считать, что состояние системы (3)-(4) описывается функцией $\overline{Y}(x,t)$, являющейся слабым решением уравнения (3) в области $\Gamma_{t_0,\infty}$ с начальным и краевым условиями:

$$Y|_{t=t_0}=\overline{Y_0}(x),\quad x\in\Im,\quad Y|_{x\in\partial\Im_{t_0,\infty}}=0, \tag{16}$$

функция $Y(x,t)\in V^{1,0}(a,\Im_{t_0,\infty})$ является слабым решением системы (3)-(4) в области $\Im_{t_0,\infty}$ с начальным и краевым условиями:

$$y|_{t=t_0}=Y_0(x),\quad x\in\Im,\quad y|_{x\in\partial\Im_{t_0,\infty}}=0. \tag{17}$$

Состояние $\overline{Y}(x,t)$ системы (3)-(4) назовем невозмущенным, а $Y(x,t)$ – возмущенным; состояния $\overline{Y}(x,t)$, $Y(x,t)$ определены в области $\Im_{t_0,\infty}$ удовлетворяют соответствующим начальным и краевым условиями (16), (17).

Определение 2 [4, 5]. Невозмущенное состояние $\overline{Y}(x,t)$ системы (3)-(4) называется слабо устойчивым по Ляпунову, если для любых $t_0>0$ и $\varepsilon>0$ существует $\delta(t_0,\varepsilon)>0$ такое, что при $\|Y_0-\overline{Y_0}\|_{L_2(\Im)}<\delta(t_0,\varepsilon)$ выполняется $\|Y(\cdot,t)-\overline{Y}(\cdot,t)\|_{W^1(a,\Im)}<\varepsilon$ при $t\geq t_0$, где $Y(x,t)$ – возмущенное состояние системы (3)-(4).

Замечание 4. Аналогично определению устойчивости невозмущенного состояния системы (3)-(4) можно ввести определение равномерной, асимптотической и экспоненциальной устойчивости невозмущенного состояния системы (3)-(4) в области $\Im_\infty$.

Замечание 5. В силу линейности системы (3)-(4) можно все определения переформулировать для нулевого (тривиального) состояния системы (3)-(4).

Теорема 2. При установленных выше предположениях невозмущенное состояние системы (3)-(4) в области $\Im_\infty$ слабо устойчиво.

Доказательство. В силу линейности системы (3)-(4) функция $\Theta(x,t)=Y(x,t)-\overline{Y}(x,t)$ – элемент пространства $V^{1,0}(a,\Im_{t_0,\infty})$ и является слабым решением начально-краевой задачи для однородной системы (3)-(4), удовлетворяющее начальному и краевому условиям:

$$\Theta|_{t=t_0}=\Phi(x), \quad x\in\Im, \ \Theta|_{x\in\partial\Im_{t_0,\infty}}=0, \tag{18}$$

где $\Phi(x)=Y_0(x)-\overline{Y_0}(x)$ [5, 6].

Выводы. В статье рассмотрен линеаризованный аналог классической задачи Навье-Стокса. Был проведен анализ устойчивости программного течения гидравлического потока. Для линеаризованной системы Навье-Стокса рассмотрены достаточно распространенные в приложениях вопросы. Первый из них: однозначная разрешимость начально-краевой задачи, представляющей собой математическую модель динамики гидравлического потока в гидросети, коэффициент вязкости которого известен. Рассмотрен вопрос устойчивости невозмущенного движения гидравлического потока.

Указаны условия, необременительные на практике, гарантирующие корректное использования численных методов для аппроксимирующих систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / пер. с фр. Л.Н. Волевича; под ред. О.А. Олейник. М.: Мир, 1972. 587 с.

2. Провоторов В.В. Оптимальное управление параболической системой с распределенными параметрами на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. № 3. С. 154–163.

3. Волкова А.С., Провоторов В.В. Обобщенные решения и обобщенные собственные функции краевых задач на геометрическом графе // Известия высших учебных заведений. Математика. 2014. № 3. С. 3–18.

4. Александров А.Ю., Жабко А.П. Об устойчивости решений одного класса нелинейных систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2006. № 9. С. 3–14.

5. Александров А.Ю., Жабко А.П. Об асимптотической устойчивости решений нелинейных систем с запаздыванием // Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53. № 3. С. 495–508.

6. Иванов А.В., Провоторов В.В., Балабан О.Р., Приходько И.В. Аппроксимация эволюционных систем гидродинамических процессов, заданных на пространственной гидросети [Электронный ресурс] // Воздушно-космические силы. Теория и практика. 2017. № 4. С. 68–78. Режим доступа: http://академия-ввс.рф/nauka/zhurnal-vks.html (дата обращения: 29.08.2018).

REFERENCES

1. Lions Zh.L. Nekotorye metody resheniya nelinejnyh kraevyh zadach / per. s fr. L.N. Volevicha; pod red. O.A. Olejnik. M.: Mir, 1972. 587 p.

2. Provotorov V.V. Optimal'noe upravlenie parabolicheskoj sistemoj s raspredelennymi parametrami na grafe // Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10: Prikladnaya matematika. Informatika. Processy upravleniya. 2014. № 3. pp. 154–163.

3. Volkova A.S., Provotorov V.V. Obobschennye resheniya i obobschennye sobstvennye funkcii kraevyh zadach na geometricheskom grafe // Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Matematika. 2014. № 3. pp. 3–18.

4. Aleksandrov A.Yu., Zhabko A.P. Ob ustojchivosti reshenij odnogo klassa nelinejnyh sistem s zapazdyvaniem // Avtomatika i telemehanika. 2006. № 9. pp. 3–14.

5. Aleksandrov A.Yu., Zhabko A.P. Ob asimptoticheskoj ustojchivosti reshenij nelinejnyh sistem s zapazdyvaniem // Sibirskij matematicheskij zhurnal. 2012. T. 53. № 3. pp. 495–508.

6. Ivanov A.V., Provotorov V.V., Balaban O.R., Prihod'ko I.V. Approksimaciya `evolyucionnyh sistem gidrodinamicheskih processov, zadannyh na prostranstvennoj gidroseti [`Elektronnyj resurs] // Vozdushno-kosmicheskie sily. Teoriya i Praktika. 2017. № 4. pp. 68–78. Rezhim dostupa: http://akademiya-vvs.rf/nauka/zhurnal-vks.html (data obrascheniya: 29.08.2018).

Балабан Олеся Руслановна, младший научный сотрудник 22 научно-исследовательского отдела 2 научно-исследовательского управления научно-исследовательского центра (проблем применения, обеспечения и управления авиацией ВВС), Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессор Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А, bal-olesya@mail.ru.

Федюнин Максим Леонидович, кандидат технических наук, заместитель начальника 24 научно-исследовательского отдела 2 научно-исследовательского управления научно-исследовательского центра (проблем применения, обеспечения и управления авиацией ВВС), Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессор Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А, nobodi1@yandex.ru.

Гаршин Сергей Александрович, старший научный сотрудник 21 научно-исследовательского отдела 2 научно-исследовательского управления научно-исследовательского центра (проблем применения, обеспечения и управления авиацией ВВС), Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессор Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А, garis@mail.ru.