УДК 519.65
ГРНТИ 27.31.00

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ АНАЛОГ ЗАДАЧИ ПЕРЕНОСА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ГРАФЕ

В.В. ПРОВОТОРОВ, доктор физико-математических наук, доцент
ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)

Для дифференциального уравнения тепломассопереноса с распределенными параметрами на графе (сети), состоящего из трех ребер, рассматривается разностная схема, аналогичная классической на одномерном континууме. Представлены условия, гарантирующие перенос свойств дифференциального оператора, описывающего начально-краевую задачу тепломассопереноса в элементах воздухоразделительных установок военного назначения, на его конечномерный аналог. Устанавливается погрешность аппроксимации и конечно-разностный аналог теоремы А.Ф. Филиппова.

Ключевые слова: задача тепломассопереноса, распределенные параметры на графе (сети), конечномерный аналог дифференциального оператора, сходимость разностной схемы, граф-звезда с тремя ребрами.

FINITE-DIFFERENCE ANALOGUE OF TRANSFER PROBLEM WITH DISTRIBUTED PARAMETERS ON GRAPH

V.V. PROVOTOROV, Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Assistant Professor
MESC AF «N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy» (Voronezh)

For the differential heat and mass transfer equation with distributed parameters on a graph (network) consisting of three edges, a difference scheme similar to the classical one-dimensional continuum is considered. The conditions that guarantee the transfer of the properties of the differential operator describing the initial-boundary value problem of heat and mass transfer in the elements of air separation units for military purposes to its finite-dimensional analog are presented. We establish the error of the approximation and finite-difference analogies of the theorem of A.F. Filippov.

Keywords: heat and mass transfer problem, distributed parameters on graph (network), finite-dimensional analogue of differential operator, convergence of difference scheme, three-edge star graph.

Введение. Работа посвящена построению конечномерному аналогу дифференциального оператора, описывающего начально-краевую задачу тепломассопереноса в элементах воздухоразделительных установок военного назначения. Основополагающим подходом при исследовании является замена дифференциальной задачи конечно-разностным аналогом. При этом сохраняются дифференциальные свойства исходной задачи. Последнее существенно упрощает анализ континуальной задачи (дифференциального оператора) на функциях бесконечномерного пространства в силу перехода к анализу в конечномерном пространстве состояний.

Актуальность. В задачах тепломассопереноса достаточно часто возникает необходимость исследования тепловых полей (полей распределения скоростей) в промышленных конструкциях (сетевых носителях), выполненных по типу графа. В работе рассматривается задача тепломассопереноса в основной ячейке сложносочленной конструкции (сетевого носителя) – пучке континуумов, называемом в научной литературе графом-звезда [1, с. 9]: множество таковых ячеек определяет структуру конструкции (носителя). При этом для простоты изложения, сохраняя основную идею исследования, используется граф-звезда с тремя ребрами.

Постановка задачи. Пусть задан граф Γ, являющийся звездой с тремя ребрами γ_1, γ_2 и γ_3, примыкающими к внутреннему узлу ζ. Ребра γ_1, γ_2 ориентированны “к узлу ζ”, а ребро γ_3 - “от узла ζ”. Через ξ_1, ξ_2 и ξ_3 обозначим внешние вершины графа Γ: $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{3} \gamma_k$.

Каждое ребро графа Γ: γ_1, γ_2 и γ_3 параметризуем отрезком $[0,1]$.

Обозначим через $u(x,t)$ распределение температур для $(x,t) \in \Gamma \times [0,\mathrm{T}]$, где Т – фиксированная положительная постоянная. Процесс распределения тепла на графе Γ описывается следующими уравнениями:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + q(x)u(x,t), \tag{1}$$

$$u(1,t)_{\gamma_1} = u(1,t)_{\gamma_2} = u(0,t)_{\gamma_3}, \tag{2}$$

$$\left(a(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=1}\right)_{\gamma 1} + \left(a(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=1}\right)_{\gamma 2} = \left(a(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0}\right)_{\gamma 3} + \delta u(x,t). \tag{3}$$

Уравнение (1) означает перенос тепла по ребрам по закону Фурье, здесь коэффициент $a(x)$ - коэффициент теплопроводности, зависящий от материала ребра; а соотношение (2) устанавливает равенство температур в узле ζ, соотношение (3) – связь тепловых потоков в узле ζ, где δ характеризует скачок значения тепловых потоков. Равенства (2) и (3) принято называть условиями согласования во внутреннем узле ζ графа Γ [1, с. 10]. Соотношения (1)-(3) назовем уравнением переноса тепла на графе Γ.

Граничная задача для уравнений (1)–(3) получается присоединением к нему начального условия:

$$u(x,0) = \varphi(x), x \in \Gamma \tag{4}$$

и граничных условий:

$$\alpha^k(0)a(0)\frac{\partial u(0,t)_{\gamma_k}}{\partial x} + \beta^k(0)u(0,t)_{\gamma_k} = 0, t \in [0,\mathrm{T}]\ (k = 1,2), \tag{5}$$

$$\alpha^3(1)a(1)\frac{\partial u(1,t)_{\gamma_3}}{\partial x} + \beta^3(1)u(1,t)_{\gamma_3} = 0, t \in [0,\mathrm{T}]. \tag{6}$$

Предварительные рассмотрения. На функциях пространства $C(\Gamma) \cap C^2[\Gamma]$ (описание пространств $C(\Gamma)$ и $C^2[\Gamma]$ приведено в [1, с. 34]) рассмотрим следующий оператор (эллиптическая часть уравнения (1)):

$$A\varphi = -\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}\right) + q(x)\varphi(x), \tag{7.1}$$

СОДЕРЖАНИЕ

$$A\varphi = \varphi(1)_{\gamma_1} = \varphi(1)_{\gamma_2} = \varphi(0)_{\gamma_3}, \tag{7.2}$$

$$A\varphi = \sum_{k=1}^{2} a(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}\bigg|_{x=1\in\gamma_k} - a(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}\bigg|_{x=0\in\gamma_3}, \tag{7.3}$$

$$A\varphi = \alpha^k a(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}\bigg|_{x=0\in\gamma_k} - \beta^k \varphi(x)\big|_{x=0\in\gamma_k} \quad (k=1,2), \tag{7.4}$$

$$A\varphi = \alpha^3 a(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}\bigg|_{x=1\in\gamma_3} - \beta^3 \varphi(x)\big|_{x=1\in\gamma_3}. \tag{7.5}$$

Лемма 1. Для $\varphi(x),\psi(x) = C(\Gamma)\bigcap C^2[\Gamma]$ и приведенного выше оператора A справедливо следующее тождество: $\int\limits_{\Gamma}\left(A\varphi\right)(x)\psi(x)dx = \int\limits_{\Gamma}\varphi(x)\left(A\psi\right)(x)dx$ (интеграл по графу Γ понимается как сумма интегралов на ребрах графа).

Доказательство. Рассмотрим интеграл $\int\limits_{\Gamma}\left(-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)\right)\psi(x)dx$ и дважды применим к нему формулу интегрирования по частям, в результате чего получим следующее соотношение:

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Gamma}\left(-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)\right)\psi(x)dx = \int\limits_{\Gamma}\varphi(x)\left(-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{d\psi(x)}{dx}\right)\right)dx + \\ + \sum_{k=1}^{3}[-a(x)\varphi'(x)_{\gamma_k}\psi(x)_{\gamma_k} + a(x)\varphi(x)_{\gamma_k}\psi'(x)_{\gamma_k}]\big|_0^1.\end{gathered} \tag{8}$$

Покажем, что второе слагаемое в правой части соотношения (8) обращается в нуль, тогда равенство (8) доказывает лемму 1. Действительно,

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{3}[-a(x)\varphi'(x)_{\gamma_k}\psi(x)_{\gamma_k} + a(x)\varphi(x)_{\gamma_k}\psi'(x)_{\gamma_k}]\big|_0^1 = \\ = [-a(1)\varphi'(1)_{\gamma_1} - a(1)\varphi'(1)_{\gamma_2} + a(0)\varphi'(0)_{\gamma_3}]\psi(1)_{\gamma_1} + \\ + [a(1)\psi'(1)_{\gamma_1} + a(1)\psi'(1)_{\gamma_2} - a(0)\psi'(0)_{\gamma_3}]\varphi(1)_{\gamma_1} + \\ + \frac{\beta^k}{\alpha^k}\varphi(0)_{\gamma_1}\psi(0)_{\gamma_1} - \frac{\beta^k}{\alpha^k}\psi(0)_{\gamma_1}\varphi(0)_{\gamma_1} + \\ + \frac{\beta^k}{\alpha^k}\varphi(0)_{\gamma_2}\psi(0)_{\gamma_2} - \frac{\beta^k}{\alpha^k}\psi(0)_{\gamma_2}\varphi(0)_{\gamma_2} - \\ - \frac{\beta^3}{\alpha^3}\varphi(1)_{\gamma_3}\psi(1)_{\gamma_3} + \frac{\beta^3}{\alpha^3}\psi(1)_{\gamma_3}\varphi(1)_{\gamma_3} = 0.\end{gathered} \tag{9}$$

Такая перегруппировка слагаемых основана на представлениях (7.2)–(7.5) оператора A.

Лемма 2. Для $\varphi(x),\psi(x)=C(\Gamma)\bigcap C^2[\Gamma]$ и приведенного выше оператора A справедливо следующее тождество:

$$\int\limits_{\Gamma}\left(-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)\right)\psi(x)dx=\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\beta^k}{\alpha^k}\varphi(0)_{\gamma_k}\psi(0)_{\gamma_k}\right)+\frac{\beta^3}{\alpha^3}\varphi(1)_{\gamma_3}\psi(1)_{\gamma_3}+\int\limits_{\Gamma}\frac{d\varphi(x)}{dx}\frac{d\psi(x)}{dx}dx. \quad (10)$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл $\int\limits_{\Gamma}\left(-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)\right)\psi(x)dx$ и применим к нему формулу интегрирования по частям, в результате чего получим следующее соотношение:

$$\int\limits_{\Gamma}\left(-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)\right)\psi(x)dx=\int\limits_{\Gamma}\frac{d\varphi(x)}{dx}\frac{d\psi(x)}{dx}dx+\sum_{k=1}^{3}\left[-a(x)\varphi'(x)\psi(x)\right]\Big|_0^1. \quad (11)$$

Преобразуем равенство (11), основываясь на представлениях (7.2)-(7.5) оператора A, получим:

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{3}\left[-a(x)\varphi'(x)\psi(x)\right]\Big|_0^1=\left[-a(1)\frac{d\varphi(1)}{dx}_{\gamma_1}-a(1)\frac{d\varphi(1)}{dx}_{\gamma_2}+a(0)\frac{d\varphi(0)}{dx}_{\gamma_3}\right]+\\ +\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\beta^k}{\alpha^k}\varphi(0)_{\gamma_k}\psi(0)_{\gamma_k}\right)+\frac{\beta^3}{\alpha^3}\varphi(1)_{\gamma_3}\psi(1)_{\gamma_3}.\end{gathered} \quad (12)$$

Последнее равенство доказывает утверждение леммы 2.

Следствие. Из леммы 2 вытекает неотрицательность собственных значений оператора A. Действительно, пусть λ_n – собственное значение, $\varphi_n(x)$ – соответствующая ему собственная функция, тогда $0\le\int\limits_{\Gamma}\left(A\varphi_n\right)(x)\varphi_n(x)dx=\lambda_n\int\limits_{\Gamma}\left(\varphi_n\right)^2(x).$

Основные результаты. Построим разностную схему – разностный (сеточный) аналог граничной задачи (1)-(6), подобно тому, как строятся разностные схемы в классических случаях [3]:

1) Область $\Gamma\times[0,\mathrm{T}]=\left\{(x,t)\in\gamma_k\times[0,\mathrm{T}]\right\}$, $k=\overline{1,3}$ изменения переменных x, t на каждом из ребер γ_1,γ_2 и γ_3 заменим дискретным множествами точек – сеточными множествами:

$$\left(\Gamma_h\right)_k=\left\{\bigcup_{k=1}^{3}\gamma_k;(x_i,t_j):0\le i\le N,0\le j\le M\right\},\ k=\overline{1,3}, \quad (13)$$

где $x_i=ih,h=\frac{1}{N},i=\overline{1,N}$. Причем сетки $\left(\gamma_h\right)_1$, $\left(\gamma_h\right)_2$ и $\left(\gamma_h\right)_3$ в силу введенной ранее параметризации на всех ребрах рассматриваемого графа Γ можно считать одинаковыми. Будем обозначать в дальнейшем их все через Γ_h. Точки $\left(ih,j\tau\right)$, $i=0,...,N,j=0,...,M$ называются узлами сетки Γ_h, а величины h, τ называются шагами по пространственной и временной осям, соответственно. Узел $(ih, j\tau)$ сетки Γ_h будем обозначать (i, j).

2) Все функции в исходной граничной задаче (1)-(6) заменим сеточными функциями – функциями, определенными в узлах сетки Γ_h. Сеточную функцию, соответствующую функции $u(x,t)$, обозначим через $u_h^k = \left\{u_i^j\right\}^k = u^k(ih, j\tau)$, $i = 0,\dots,N, j = 0,\dots,M$, $k = 1,2,3$. Аналогично строятся сеточные функции, соответствующие функциям $a(x), q(x), \varphi(x)$, которые обозначим следующим образом: $a_h^k = \left\{a_i^j\right\}^k = a^k(ih, j\tau),\quad q_h^k = \left\{q_i^j\right\}^k = q^k(ih, j\tau),\quad \varphi_h^k = \left\{\varphi_i^j\right\}^k = \varphi^k(ih, j\tau)$.

3) Производные $\dfrac{\partial u(x,t)_{\gamma_k}}{\partial t}$, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\dfrac{\partial u(x,t)_{\gamma_k}}{\partial x}\right)$ в исходной граничной задаче (1)-(6) заменим разностными отношениями вида:

$$\frac{\left\{u_i^{j+1}\right\}^k - \left\{u_i^j\right\}^k}{\tau},\ \frac{\left\{a_{i+1}^j\right\}^k \dfrac{\left\{u_{i+1}^j\right\}^k - \left\{u_i^j\right\}^k}{h} - \left\{a_i^j\right\}^k \dfrac{\left\{u_i^j\right\}^k - \left\{u_{i-1}^j\right\}^k}{h}}{h}\ (k = 1,2,3), \tag{14}$$

соответственно.

Получим следующий конечно-разностный аналог задачи (1)-(6):

$$\begin{gathered}\frac{\left\{u_i^{j+1}\right\}^k - \left\{u_i^j\right\}^k}{\tau} = \frac{\left\{a_{i+1}^j\right\}^k \dfrac{\left\{u_{i+1}^j\right\}^k - \left\{u_i^j\right\}^k}{h} - \left\{a_i^j\right\}^k \dfrac{\left\{u_i^j\right\}^k - \left\{u_{i-1}^j\right\}^k}{h}}{h} + \\ + \left\{q_i^j\right\}^k \left\{u_i^j\right\}^k\ (i = 0,1,\dots,N;\ j = 0,1,\dots,M;\ k = 1,2,3),\end{gathered} \tag{15}$$

$$\left(u_N^j\right)^1 = \left(u_N^j\right)^2 = \left(u_0^j\right)^3\ (j = 0,1,\dots,M), \tag{16}$$

$$\begin{gathered}\left(a_N^j\right)^1 \frac{\left(u_N^j\right)^1 - \left(u_{N-1}^j\right)^1}{h} + \left(a_N^j\right)^2 \frac{\left(u_N^j\right)^2 - \left(u_{N-1}^j\right)^2}{h} = \\ = \left(a_1^j\right)^3 \frac{\left(u_1^j\right)^3 - \left(u_0^j\right)^3}{h} + \delta\left(u_0^j\right)^3\ (j = 0,1,\dots,M),\end{gathered} \tag{17}$$

$$\left(u_i^0\right)^k = \left(\varphi_i^0\right)^k\ (i = 0,1,\dots,N;\ k = 1,2,3), \tag{18}$$

$$\left(\alpha_0^j\right)^k \left(a_0^j\right)^k \frac{\left(u_1^j\right)^k - \left(u_0^j\right)^k}{h} - \left(\beta_0^j\right)^k \left(u_0^j\right)^k = 0 (k = 1, 2), \tag{19}$$

$$\left(\alpha_N^j\right)^3 \left(a_N^j\right)^3 \frac{\left(u_N^j\right)^3 - \left(u_{N-1}^j\right)^3}{h} - \left(\beta_N^j\right)^3 \left(u_N^j\right)^3 = 0. \tag{20}$$

Разностный аналог (15)-(20) аппроксимирует граничную задачу (1)-(6) с погрешностью порядка $O(h+\tau)$.

Далее рассмотрим разностный аналог оператора A, который обозначим A^h, а также сформулируем и докажем утверждения относительно A^h, аналогичные лемме 1 и 2. Для упрощения дальнейшей записи заменим обозначение $\left\{ \omega_i^j \right\}^k$ на ω_i^k, т.е. в дальнейшем параметр j не будет учитываться.

$$A^h \varphi = \sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{N-1} a_{i+1}^k \left(\varphi_{i+1}^k - \varphi_i^k\right) - a_i^k \left(\varphi_i^k - \varphi_{i-1}^k\right), \tag{21.1}$$

$$A^h \varphi = a_N^1 \frac{\varphi_N^1 - \varphi_{N-1}^1}{h} + a_N^2 \frac{\varphi_N^2 - \varphi_{N-1}^2}{h} - a_1^3 \frac{\varphi_1^3 - \varphi_0^3}{h} - \delta \varphi_0^3, \tag{21.2}$$

$$A^h \varphi = \alpha_0^k a_0^k \frac{\varphi_1^k - \varphi_0^k}{h} - \beta_0^k \varphi_0^k (k = 1, 2), \tag{21.3}$$

$$A^h \varphi = \alpha_N^3 a_N^3 \frac{\varphi_N^3 - \varphi_{N-1}^3}{h} - \beta_N^k \varphi_N^3. \tag{21.4}$$

Кроме того, для сеточной функции $\varphi_i^k (i = 0, 1, ..., N; k = 1, 2, 3)$ выполнены следующие равенства:

$$\varphi_N^1 = \varphi_N^2 = \varphi_0^3. \tag{22}$$

Очевидно, что конечно-разностный оператор A^h аппроксимирует оператор A с погрешностью, равной $O(h)$.

Теорема 1. Для сеточных функций u_i^k, w_i^k $(k = 1, 2, 3; i = 0, 1, ..., N)$, удовлетворяющих условию (22), и оператора A^h справедливо следующее тождество:

СОДЕРЖАНИЕ

$$\begin{aligned} &-\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{N-1}\left[a_{i+1}^{k}\left(u_{i+1}^{k}-u_{i}^{k}\right)-a_{i}^{k}\left(u_{i}^{k}-u_{i-1}^{k}\right)\right]w_{i}^{k}= \\ &=-\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{N-1}\left[a_{i+1}^{k}\left(w_{i+1}^{k}-w_{i}^{k}\right)-a_{i}^{k}\left(w_{i}^{k}-w_{i-1}^{k}\right)\right]u_{i}^{k}. \end{aligned} \tag{23}$$

Доказательство. Для доказательства тождества (23) разложим его левую и правую стороны на отдельные слагаемые, затем перегруппируем их, что позволит сократить в обеих сторонах тождества одинаковые слагаемые. В результате получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} &a_1^1u_0^1w_1^1+a_N^1u_N^1w_{N-1}^1+a_1^2u_0^2w_1^2+a_N^2u_N^2w_{N-1}^2+a_1^3u_0^3w_1^3+a_N^3u_N^3w_{N-1}^3= \\ &=a_1^1u_1^1w_0^1+a_N^1u_{N-1}^1w_N^1+a_1^2u_1^2w_0^2+a_N^2u_{N-1}^2w_N^2+a_1^3u_1^3w_0^3+a_N^3u_{N-1}^3w_N^3. \end{aligned} \tag{24}$$

Тождество (24) эквивалентно тождеству (23), т.е. для доказательства теоремы 1 теперь необходимо доказать тождество (24). Разобьем равенство (24) на два:

$$a_N^1u_N^1w_{N-1}^1+a_N^2u_N^2w_{N-1}^2+a_1^3u_0^3=a_N^1u_{N-1}^1w_N^1+a_N^2u_{N-1}^2w_N^2+a_1^3u_1^3w_0^3, \tag{25}$$

$$a_1^1u_0^1w_1^1+a_1^2u_0^2w_1^2+a_N^3u_N^3w_{N-1}^3=a_1^1u_1^1w_0^1+a_1^2u_1^2w_0^2+a_N^3u_{N-1}^3w_N^3. \tag{26}$$

Докажем каждое из них по отдельности.

Для доказательства равенства (25) используются конечно-разностные аналоги первого и второго условий согласования, представленные в виде условия (22) и соотношения (21.2). Преобразуем соотношение (21.2), выписанное для сеточных функций u_i^k и w_i^k, следующим образом:

$$a_N^1u_N^1+a_N^2u_N^2+a_1^3u_0^3-\delta u_0^3h=a_N^1u_{N-1}^1+a_N^2u_{N-1}^2+a_1^3u_{N-1}^3, \tag{27}$$

$$a_N^1w_N^1+a_N^2w_N^2+a_1^3w_0^3-\delta w_0^3h=a_N^1w_{N-1}^1+a_N^2w_{N-1}^2+a_1^3w_{N-1}^3. \tag{28}$$

Проведя в равенстве (25) замены $u_N^1=u_N^2=u_0^3$, $w_N^1=w_N^2=w_0^3$ и воспользовавшись равенством (27), получим очевидное доказательство равенства (25).

Перейдем к доказательству равенства (26). Воспользуемся соотношениями (21.3) и (21.4), выписанными для сеточных функций u_i^k и w_i^k. Преобразуя каждое из 6 полученных таким образом равенств, получим следующие представления:

$$u_0^k=\frac{\alpha_0^ka_0^ku_1^1}{\alpha_0^ka_0^k-\beta_0^kh}, k=1,2;\ u_N^3=\frac{\alpha_N^3a_N^3u_{N-1}^3}{\alpha_N^3a_N^3-\beta_N^3h}. \tag{29}$$

Аналогичные представления имеют место и для $w_0^k (k=1,2)$, w_N^3. Тогда из соотношения (29) и замечания о $w_i^k (i=0,N; k=1,2,3)$ получаем:

$$a_1^k u_0^k w_1^k = a_1^k u_1^k w_0^k, \quad k=1,2, \tag{30}$$

$$a_N^3 u_N^3 w_{N-1}^3 = a_N^3 u_{N-1}^3 w_N^3 . \tag{31}$$

Подставляя соотношения (30), (31) в равенство (26) получаем очевидное тождество – таким образом, равенство (26) доказано. Значит, установлена справедливость равенства (24) и доказана теорема 1.

Замечание 1. Утверждение теоремы 1 описывает разностный аналог тождества, установленного утверждением леммы 1.

Теорема 2. Для сеточных функций u_i^k, w_i^k $(k=1,2,3;\ i=0,1,...,N)$, удовлетворяющих условию (22), и оператора A^h справедливо следующее тождество:

$$\begin{aligned} -\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{N-1}\left[a_{i+1}^k\left(u_{i+1}^k-u_i^k\right)-a_i^k\left(u_i^k-u_{i-1}^k\right)\right]w_i^k = \\ =\sum_{k=1}^{3}\left[w_N^k\left(a_N^k\left(u_N^k-u_{N-1}^k\right)\right)-w_1^k\left(a_1^k\left(u_1^k-u_0^k\right)\right)\right]- \\ -\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{N-1}a_{i+1}^k\left(u_{i+1}^k-u_i^k\right)\left(w_{i+1}^k-w_i^k\right), \end{aligned} \tag{32}$$

выражение, стоящее в правой части равенства (32), обладает свойством симметричности.

Доказательство. Справедливость тождества (32) показывается разложением сумм на отдельные слагаемые с их последующей перегруппировкой.

Установим свойство симметричности выражения, стоящего в правой части (32). Для выражения $\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{N-1}a_{i+1}^k\left(u_{i+1}^k-u_i^k\right)\left(w_{i+1}^k-w_i^k\right)$ свойство симметричности очевидно. Остается проверить равенство:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3}\left[w_N^k\left(a_N^k\left(u_N^k-u_{N-1}^k\right)\right)-w_1^k\left(a_1^k\left(u_1^k-u_0^k\right)\right)\right]= \\ =\sum_{k=1}^{3}\left[u_N^k\left(a_N^k\left(w_N^k-w_{N-1}^k\right)\right)-u_1^k\left(a_1^k\left(w_1^k-w_0^k\right)\right)\right]. \end{aligned} \tag{33}$$

Разложим левую и правую стороны равенства (33) на отдельные слагаемые, затем перегруппируем их. В результате получим следующее равенство:

СОДЕРЖАНИЕ

$$\begin{gathered}-a_N^1 u_{N-1}^1 w_N^1 + a_1^1 u_0^1 w_1^1 - a_N^2 u_{N-1}^2 w_N^2 + a_1^2 u_0^2 w_1^2 - a_N^3 u_{N-1}^3 w_N^3 + a_1^3 u_0^3 w_1^3 = \\ = -a_N^1 u_N^1 w_{N-1}^1 + a_1^1 u_1^1 w_0^1 - a_N^2 u_N^2 w_{N-1}^2 + a_1^2 u_1^2 w_0^2 - a_N^3 u_N^3 w_{N-1}^3 + a_1^3 u_1^3 w_0^3.\end{gathered} \tag{34}$$

Полученное равенство можно разбить на два:

$$\begin{gathered}a_N^1 u_N^1 w_{N-1}^1 + a_N^2 u_N^2 w_{N-1}^2 + a_1^3 u_0^3 w_1^3 = a_N^1 u_{N-1}^1 w_N^1 + a_N^2 u_{N-1}^2 w_N^2 + a_1^3 u_1^3 w_0^3, \\ a_1^1 u_0^1 w_1^1 + a_1^2 u_0^2 w_1^2 + a_N^3 u_N^3 w_{N-1}^3 = a_1^1 u_1^1 w_0^1 + a_1^2 u_1^2 w_0^2 + a_N^3 u_{N-1}^3 w_N^3.\end{gathered} \tag{35}$$

Последние два равенства совпадают с выражениями (25), (26), которые доказаны выше. Следовательно, равенство (34) доказано, таким образом, доказано утверждение теоремы 2.

Замечание 2. Соотношение (32) является разностным аналогом континуального соотношения леммы 2.

Замечание 3. Из утверждения теоремы 2 вытекает положительность собственных значений оператора A^h.

Приведенные выше утверждения показывают инвариантность свойств симметрии и положительной определенности для конечно-разностного оператора.

Вывод. Можно показать [1, с. 33], что собственные функции оператора A образуют ортонормальный базис в пространстве $L_2(\Gamma)$. Тогда в силу утверждений теорем 1 и 2 собственные векторы конечно-разностного оператора A^h образуют ортонормальный базис в соответствующем конечномерном пространстве. Последнее является основополагающим фактом для анализа устойчивости и сходимости разностной схемы (15)-(20). Представленные условия гарантируют перенос свойств дифференциального оператора, описывающего начально-краевую задачу тепломассопереноса в элементах воздухоразделительных установок военного назначения. На основании данного факта получен конечно-разностный аналог теоремы А.Ф. Филиппова [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Провоторов В.В., Волкова А.С. Начально-краевые задачи с распределенными параметрами на графе. Воронеж: Научная книга, 2014. 188 с.

2. Провоторов В.В., Махинова О.А. Краевые задачи для уравнений с распределенными параметрами на графах. Воронеж: Научная книга, 2013. 133 с.

REFERENCES

1. Provotorov V.V., Volkova A.S. Nachal'no-kraevye zadachi s raspredelennymi parametrami na grafe. Voronezh: Nauchnaya kniga, 2014. 188 p.

2. Provotorov V.V., Mahinova O.A. Kraevye zadachi dlya uravnenij s raspredelennymi parametrami na grafah. Voronezh: Nauchnaya kniga, 2013. 133 p.

© Провоторов В.В., 2018

Провоторов Вячеслав Васильевич, доктор физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник 22 отдела научно-исследовательского 2 управления научно-исследовательского научно-исследовательского центра (проблем применения, обеспечения и управления авиацией ВВС), Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А, wwprov@mail.ru.

СОДЕРЖАНИЕ