



УДК 532.233:532.135  
ГРНТИ 30.17.23

## МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ РЕОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СУСПЕНЗИИ

*В.Н. КОЛОДЕЖНОВ, доктор технических наук, профессор  
ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)*

В статье предложена реологическая модель суспензии мелкодисперсных частиц, жидкая основа которой представляет собой нелинейную вязкопластическую жидкость. Модель описывает поведение касательного напряжения на четырех диапазонах изменения скорости сдвига, каждому из которых соответствует определенный закон изменения вязкости по мере повышения скорости сдвига. Предложена методика определения параметров этой реологической модели на основе обработки набора экспериментальных данных для построения кривой течения, которая представляет собой зависимость касательного напряжения от скорости сдвига.

*Ключевые слова:* неньютоновская жидкость, суспензия, реологическая модель, касательное напряжение, скорость сдвига, вязкость, алгоритм определения параметров модели.

## TECHNIQUE FOR DETERMINING THE VISCOPLASTIC SUSPENSION RHEOLOGICAL MODEL PARAMETERS

*V.N. KOLODEZHNOV, Doctor of Technical Sciences, Professor  
MESC AF «N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy» (Voronezh)*

The article proposes a rheological model of a fine particles suspension, the liquid base of which is a nonlinear viscoplastic liquid. The model describes the behavior of the shear stress over four ranges of shear rate changes, each of which corresponds to a certain law of viscosity change as the shear rate increases. A method is proposed for determining the parameters of this rheological model based on the processing of a set of experimental data for constructing a flow curve, which is the dependence of the shear stress on the shear rate.

*Keywords:* non-Newtonian fluid, suspension, rheological model, tangential stress, shear rate, viscosity, algorithm for determining model parameters.

**Введение.** В настоящее время исследование суспензий мелкодисперсных частиц на полимерной жидкой основе представляется перспективным направлением с точки зрения создания новых инновационных материалов с нетрадиционными свойствами. Это обусловлено тем, что некоторые виды суспензий могут демонстрировать аномалии механического поведения. Это касается, прежде всего, их вязкости.

Заметим, что большинство рабочих сред относится к так называемым ньютоновским жидкостям, которые характеризуются постоянным значением вязкости. Другой класс рабочих сред – неньютоновские жидкости демонстрируют монотонный характер изменения вязкости на достаточно большом диапазоне изменения скорости сдвига. Как правило, среди вязких неньютоновских жидкостей выделяют две подгруппы – псевдопластические и дилатантные жидкости. Псевдопластическим жидкостям соответствует монотонное снижение вязкости по мере роста скорости сдвига. Что же касается дилатантных жидкостей, то они, наоборот, проявляют себя монотонным возрастанием вязкости по мере увеличения скорости сдвига.



В отличие от таких традиционных сплошных сред, некоторые виды суспензий имеют более сложный характер вязкого поведения [1–6]. Это проявляется в особенностях зависимости их вязкости от скорости сдвига, которые заключаются в следующем. На различных диапазонах изменения скорости сдвига суспензия может демонстрировать различный характер изменения вязкости. В частности, режим монотонного убывания вязкости на одном диапазоне изменения скорости сдвига может меняться на монотонное возрастание, но уже на другом диапазоне. А затем, на следующем диапазоне изменения скорости сдвига, ее характер вновь изменяется на монотонное убывание. При этом на кривой течения, характеризующей зависимость касательного напряжения от скорости сдвига, а также графике зависимости вязкости от скорости сдвига возникают точки перегиба, соответствующие границам таких диапазонов.

Суспензии такого рода могут быть использованы в качестве основы для ряда материалов с достаточно специфическими особенностями механического поведения. Эти особенности обусловлены, прежде всего, аномалиями вязкости, которые проявляются при определенных сочетаниях с одной стороны – формы, размеров и концентрации твердых частиц, а с другой – реологических характеристик жидкой компоненты. В частности, при приближении скорости сдвига в соответствующих зонах области течения к некоторому критическому значению, вязкость таких суспензий может резко увеличиваться. При этом для некоторых видов суспензий это увеличение может быть настолько существенным, что значение вязкости возрастает на несколько порядков. Тогда поведение суспензии в таких зонах области течения становится подобным поведению твердого тела. В такой ситуации можно говорить об «упрочнении» суспензии или проявлении эффекта «отвердевания».

В основе аномалий такого механического поведения суспензий лежат изменения внутренней структуры материала, возникающие при различных режимах деформирования и связанные с формированием мелкодисперсными частицами ассоциаций или кластеров типа «твердых» структур.

Некоторые направления практического использования суспензий такого рода в технических приложениях приводятся в [7, 8]. Отдельные специальные виды суспензий могут функционировать в режиме так называемой «жидкой» брони и использоваться для создания защитных покрытий [9, 10].

Заметим, что для производства изделий «фиксированной» формы из таких материалов они должны демонстрировать свойство пластичности. Естественно, что такая особенность механического поведения может быть реализована посредством в качестве жидкой компоненты вязкопластических жидкостей с достаточно большим значением напряжения сдвига.

Некоторые примеры достаточно простых реологических моделей подобных жидкостей с аномалиями вязкого поведения рассматривались в [11, 12].

Однако эти модели не в полной мере описывают все особенности механического поведения суспензий, что в свою очередь ограничивает точность проведения расчетов в задачах гидродинамики рабочих сред такого рода.

**Актуальность.** Принимая во внимание перспективность использования суспензий мелкодисперсных частиц при создании новых инновационных материалов, разработка реологической модели, обеспечивающей более полное описание механического поведения таких рабочих сред с учетом аномалий зависимости вязкости от скорости сдвига, является актуальной задачей.

Любая реологическая модель определяется соответствующим набором параметров. Количество таких параметров для классических моделей вязкой жидкости сравнительно невелико. Так, например, реологическая модель ньютоновской жидкости содержит лишь один параметр – динамическую вязкость. Реологические модели псевдопластической и дилатантной жидкости содержат уже два параметра – коэффициент консистенции и индекс течения. Можно ожидать, что реологическая модель, учитывающая различный характер поведения вязкости на различных диапазонах изменения скорости сдвига, предположительно, должна определяться



достаточно большим набором параметров. В этой связи, наряду с проблемой собственно постулирования математической формы представления реологической модели возникает еще и проблема идентификации параметров этой модели.

В этой связи целью данной статьи является разработка методики обработки экспериментальных данных зависимости касательного напряжения от скорости сдвига и определения на ее основе параметров предлагаемой реологической модели суспензии мелкодисперсных частиц.

**Реологическая модель.** Анализируя известные экспериментальные данные [1–6], можно видеть, что для зависимости касательного напряжения  $\tau$  и вязкости  $\mu$  от скорости сдвига  $\dot{\gamma}$  можно выделить четыре характерных диапазона, на каждом из которых эта зависимость характеризуется следующим образом.

В диапазоне сравнительно небольших значений скорости сдвига сплошная среда ведет себя подобно псевдопластической жидкости и ее вязкость  $\mu$ , начиная с начального уровня  $\mu_0$  при  $\dot{\gamma} = 0$ , монотонно уменьшается по мере увеличения скорости сдвига. Достигая при некотором значении скорости сдвига  $|\dot{\gamma}| = \dot{\gamma}_{\min}$  минимального уровня  $\mu = \mu_{\min}$ , вязкость начинает возрастать. При этом, механическое поведение суспензии начинает соответствовать уже поведению дилатантной жидкости. Условно говоря, такой режим дилатантного поведения продолжается до некоторого значения скорости сдвига  $|\dot{\gamma}| = \dot{\gamma}_{sol}$ , при котором вязкость достигает уровня  $\mu = \mu_{sol}$ .

Хотя на этих двух диапазонах изменения скорости сдвига вязкость и меняется, тем не менее, эти изменения не носят радикального характера. В целом, здесь она принимает значения примерно одного и того же порядка из диапазона  $\mu_{\min} < \mu < \max\{\mu_0, \mu_{sol}\}$ .

Однако, дальнейшее увеличение скорости сдвига, сохраняя общую тенденцию к возрастанию вязкости, сопровождается более резким нарастанием темпа ее возрастания. Известные экспериментальные данные показывают [2], что при  $|\dot{\gamma}| > \dot{\gamma}_{sol}$  вязкость может увеличиться на несколько порядков. Для соответствующих характеристик суспензии (размеры, материал и концентрация твердых частиц) возрастание вязкости становится настолько существенным, что суспензия начинает вести себя подобно твердому телу. Такое поведение суспензии можно охарактеризовать, как проявление эффекта «упрочнения» или «отвердевания». Этот вариант поведения суспензии реализуется вплоть до достижения вязкостью некоторого максимального уровня  $\mu = \mu_{\max}$  при соответствующем значении скорости сдвига  $|\dot{\gamma}| = \dot{\gamma}_{\max}$ .

Что же касается дальнейшего увеличения скорости сдвига на четвертом диапазоне ее изменения, то при  $|\dot{\gamma}| > \dot{\gamma}_{\max}$  вновь может иметь место монотонное снижение вязкости.

Заметим, что здесь и далее под вязкостью понимается следующая величина

$$\mu(\dot{\gamma}) = \frac{d|\tau(|\dot{\gamma}|)|}{d|\dot{\gamma}|}. \quad (1)$$

Приведенная выше характеристика поведения вязкости некоторых типов суспензий предполагает с учетом (1) достаточно сложный вид для кривой течения, представляющей собой зависимость касательного напряжения от скорости сдвига. Такую кривую течения вполне допустимо описывать какой-либо одной достаточно сложной функцией, что представляется, однако, не совсем рациональным. Такой подход приведет, по-видимому, к затруднениям при получении аналитических решений в явном виде даже для сравнительно простых задач



гидродинамики. В этой связи, учитывая наличие для зависимости вязкости от скорости сдвига характерных диапазонов, вообще говоря, различного реологического поведения, предлагается реологическую модель суспензий такого рода принять в следующей форме

$$|\tau(|\dot{\gamma}|)| = \begin{cases} \tau_1 + k_1 \cdot (|\dot{\gamma}| + \dot{\gamma}_1)^{n_1} & 0 \leq |\dot{\gamma}| \leq \dot{\gamma}_{\min}; \\ \tau_2 + k_2 \cdot (|\dot{\gamma}| - \dot{\gamma}_2)^{n_2} & \dot{\gamma}_{\min} \leq |\dot{\gamma}| \leq \dot{\gamma}_{sol}; \\ \tau_3 - k_3 \cdot (\dot{\gamma}_3 - |\dot{\gamma}|)^{n_3} & \dot{\gamma}_{sol} \leq |\dot{\gamma}| \leq \dot{\gamma}_{\max}; \\ \tau_4 + k_4 \cdot (|\dot{\gamma}| - \dot{\gamma}_4)^{n_4} & |\dot{\gamma}| \geq \dot{\gamma}_{\max}; \end{cases} \quad (2)$$

где

$$\tau_j, k_j > 0, \dot{\gamma}_j, n_j, j = 1, 2, 3, 4; \quad (3)$$

представляют собой параметры реологической модели, на которые должны быть наложены ограничения

$$\begin{aligned} \tau_1 < \tau_p; \tau_4 < \tau_{\max} < \tau_3; \dot{\gamma}_1 > 0; \dot{\gamma}_2 < \dot{\gamma}_{\min}; \dot{\gamma}_4 \leq \dot{\gamma}_{\max} \leq \dot{\gamma}_3; \\ 0 < n_1 < 1; n_2 > 1; 0 < n_3 < 1; 0 < n_4 < 1. \end{aligned} \quad (4)$$

В дополнение к (4) для модельного соотношения (2) необходимо потребовать, чтобы параметры (3) удовлетворяли следующим условиям

$$\begin{aligned} \tau_p &= \tau_1 + k_1 \cdot (\dot{\gamma}_1)^{n_1}; \\ \tau_{\min} &= \tau_1 + k_1 \cdot (\dot{\gamma}_{\min} + \dot{\gamma}_1)^{n_1} = \tau_2 + k_2 \cdot (\dot{\gamma}_{\min} - \dot{\gamma}_2)^{n_2}; \\ k_1 \cdot n_1 \cdot (\dot{\gamma}_{\min} + \dot{\gamma}_1)^{n_1-1} &= k_2 \cdot n_2 \cdot (\dot{\gamma}_{\min} - \dot{\gamma}_2)^{n_2-1}; \\ \tau_s &= \tau_2 + k_2 \cdot (\dot{\gamma}_s - \dot{\gamma}_2)^{n_2} = \tau_3 - k_3 \cdot (\dot{\gamma}_3 - \dot{\gamma}_s)^{n_3}; \\ k_2 \cdot n_2 \cdot (\dot{\gamma}_s - \dot{\gamma}_2)^{n_2-1} &= k_3 \cdot n_3 \cdot (\dot{\gamma}_3 - \dot{\gamma}_s)^{n_3-1}; \\ \tau_{\max} &= \tau_3 - k_3 \cdot (\dot{\gamma}_3 - \dot{\gamma}_{\max})^{n_3} = \tau_4 + k_4 \cdot (\dot{\gamma}_{\max} - \dot{\gamma}_4)^{n_4}; \\ k_3 \cdot n_3 \cdot (\dot{\gamma}_3 - \dot{\gamma}_{\max})^{n_3-1} &= k_4 \cdot n_4 \cdot (\dot{\gamma}_{\max} - \dot{\gamma}_4)^{n_4-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Параметры  $\tau_p, \tau_{\min}, \tau_s, \tau_{\max}$  в соотношениях (4), (5) представляют собой характерные для данной суспензии значения модуля касательного напряжения.

В частности,  $\tau_p$  представляет собой напряжение сдвига, определяемое пластическими свойствами жидкой компоненты суспензии. Параметрам  $\tau_{\min}$  и  $\tau_{\max}$  соответствуют касательные напряжения, при которых вязкость достигает, соответственно, минимального и максимального значений. Еще один параметр  $\tau_{sol}$  определяет касательное напряжение при некотором значении скорости сдвига  $|\dot{\gamma}| = \dot{\gamma}_{sol}$ . Это значение принадлежит диапазону  $\dot{\gamma}_{\min} < |\dot{\gamma}| < \dot{\gamma}_{\max}$  монотонного увеличения вязкости суспензии от минимального значения  $\mu_{\min}$  до максимального уровня  $\mu_{\max}$ . Принимая во внимание характер изменения вязкости, в качестве  $\dot{\gamma}_{sol}$  может быть принято такое значение скорости сдвига, при котором график зависимости вязкости от скорости сдвига на



диапазоне своего монотонного возрастания имеет точку перегиба. Допустимы также и некоторые другие варианты выбора значения  $\dot{\gamma}_{sol}$ .

Необходимость выполнения условий (5) обусловлена тем, что они обеспечивают непрерывную дифференцируемость для зависимости (2) касательного напряжения от скорости сдвига. При этом, для зависимости вязкости от скорости сдвига выполняется лишь условие непрерывности.

**Методика определения параметров реологической модели.** Рассмотрим методику определения параметров реологической модели на примере первого диапазона изменения скорости сдвига (первый характерный участок кривой течения).

Пусть для диапазона  $\dot{\gamma} \in [0; \dot{\gamma}_{min}]$  изменения скорости сдвига определен набор  $I_1$  пар экспериментальных данных  $\{\dot{\gamma}_i, \tau_i\}$ ;  $i=1, 2, \dots, I_1$  зависимости касательного напряжения  $\tau$  от скорости сдвига  $\dot{\gamma}$ .

Выберем с учетом выполнения ограничений (4) два набора характерных значений следующих параметров

$$n_1^j > 0; j = 1, 2, \dots, J_1; \dot{\gamma}_1^k > 0; k = 1, 2, \dots, K_1, \quad (6)$$

где  $J_1, K_1$  – количество значений параметров в каждом из этих наборов, соответственно.

Для определенности будем полагать, что выбранные значения этих параметров удовлетворяют условиям

$$n_1^j < n_1^{j+1}; \dot{\gamma}_1^k < \dot{\gamma}_1^{k+1}.$$

Для каждой комбинации значений параметров (6) кривая течения на первом участке с учетом (2) должна описываться функцией вида

$$\tau = \tau_1 + k_1 \cdot f_1(\dot{\gamma}, n_1^j, \dot{\gamma}_1^k); f_1(\dot{\gamma}, n_1, \dot{\gamma}_1) = (\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_1)^{n_1}. \quad (7)$$

Тогда, для выбранной комбинации параметров

$$\{n_1^j, \dot{\gamma}_1^k\}; j = 1, 2, \dots, J_1; k = 1, 2, \dots, K_1 \quad (8)$$

определение неизвестных пока значений двух других параметров  $\tau_1 = \tau_1^{jk}$  и  $k_1 = k_1^{jk}$ , соответствующих этим комбинациям (8), предлагается находить методом наименьших квадратов из условия минимума следующей функции невязки

$$F_1(\tau_1^{jk}, k_1^{jk}) = \sum_{i=1}^{I_1} (\tau_1^{jk} + k_1^{jk} \cdot f_1(\dot{\gamma}_i, n_1^j, \dot{\gamma}_1^k) - \tau_i)^2. \quad (9)$$

Решение вытекающей из такого условия системы двух линейных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \tau_1^{jk} &= \frac{D_1 \cdot C_{22} - D_2 \cdot C_{12}}{C_{11} \cdot C_{22} - C_{21} \cdot C_{12}}; \\ k_1^{jk} &= \frac{D_2 \cdot C_{11} - D_1 \cdot C_{21}}{C_{11} \cdot C_{22} - C_{21} \cdot C_{12}}. \end{aligned} \quad (10)$$



Здесь

$$C_{11} = I_1; C_{12} = \sum_{i=1}^{I_1} f_1(\dot{\gamma}_i, n_1^j, \dot{\gamma}_1^k); D_1 = \sum_{i=1}^{I_1} \tau_i;$$

$$C_{21} = C_{12}; C_{22} = \sum_{i=1}^{I_1} [f_1(\dot{\gamma}_i, n_1^j, \dot{\gamma}_1^k)]^2; D_2 = \sum_{i=1}^{I_1} \tau_i \cdot f_1(\dot{\gamma}_i, n_1^j, \dot{\gamma}_1^k).$$

Таким образом, на этом этапе для каждой из  $(J_1 \cdot K_1)$  составленных комбинаций значений параметров (6) может быть поставлен в соответствие набор искомых параметров

$$\tau_1^{jk}, k_1^{jk}, n_1^j, \dot{\gamma}_1^k; j=1,2,\dots,J_1; k=1,2,\dots,K_1. \quad (11)$$

В таком случае для каждого такого набора значений параметров (11) зависимость касательного напряжения от скорости сдвига на первом участке кривой течения должна описываться соотношением вида

$$\tau = \tau_1^{jk} + k_1^{jk} \cdot f_1(\dot{\gamma}, n_1^j, \dot{\gamma}_1^k). \quad (12)$$

Для этих наборов параметров (11) определяем значения средней относительной погрешности вычисления касательного напряжения с учетом (12) по отношению к соответствующему (для того же значения скорости сдвига) экспериментальному значению

$$E_1^{jk} = \frac{1}{I_1} \cdot \sum_{i=1}^{I_1} \frac{|\tau_1^{jk} + k_1^{jk} \cdot f_1(\dot{\gamma}_i, n_1^j, \dot{\gamma}_1^k) - \tau_i|}{\tau_i}; j=1,2,\dots,J_1; k=1,2,\dots,K_1. \quad (13)$$

Найденные значения  $E_1^{jk}$  в плоскости параметров  $n_1$  и  $\dot{\gamma}_1$  характеризуют их влияние на среднюю относительную погрешность описания с помощью аппроксимирующей функции (7) поведения кривой течения на первом участке изменения скорости сдвига. Априори можно ожидать, что некоторые комбинации выбираемых параметров  $\{n_1^j, \dot{\gamma}_1^k\}$  будут более «благоприятными» в том смысле, что они обеспечивают меньшие значения средней относительной погрешности. Другие же комбинации, демонстрирующие более высокие значения средней относительной погрешности, окажутся менее «благоприятными».

Для построенного с учетом (13) множества  $E_1^{jk}$  находим его элемент с наименьшим значением

$$E_1^{j_0 k_0} = \min_{j,k} \{ E_1^{jk} \},$$

где  $j_0, k_0$  – номера выбираемых параметров (6), которым соответствует минимальный по значению элемент из массива  $E_1^{jk}$ .

Полученную совокупность значений  $E_1^{jk}$  далее будем рассматривать, как набор «псевдоэкспериментальных» данных, которые можно аппроксимировать некоторой функцией

$$E_1 = E_1(n_1, \dot{\gamma}_1). \quad (14)$$





При соответствующем выборе вида аппроксимирующей функции (14), она будет иметь экстремум типа минимум, который будет достигаться в некоторой точке  $\{n_1^{opt}, \dot{\gamma}_1^{opt}\}$  рассматриваемой плоскости параметров  $\{n_1, \dot{\gamma}_1\}$ . Тогда значения параметров

$$n_1 = n_1^{opt}; \dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}_1^{opt} \quad (15)$$

и предлагается далее принимать в качестве наиболее приемлемых (оптимальных) значений этих параметров, обеспечивающих минимальное значение средней относительной погрешности.

Рассмотрим теперь следующий возможный подход к построению функции (14) и определению оптимальных значений параметров (15).

Как показывают тестовые примеры обработки известных экспериментальных данных, представленных, например, в работе [2], значения  $E_1^{jk}$  так располагаются на плоскости параметров  $\{n_1, \dot{\gamma}_1\}$ , что линии равного уровня предполагаемой функции (14)

$$E_1(n_1, \dot{\gamma}_1) = const$$

имеют форму, близкую к вытянутым овалам, которые предлагается в первом приближении аппроксимировать эллипсами. При этом оси таких овалов и, соответственно, аппроксимирующих их эллипсов оказываются повернутыми по отношению к координатным осям параметров  $\{n_1, \dot{\gamma}_1\}$  на некоторый угол  $\alpha$  так, как это показано на рисунке 1.

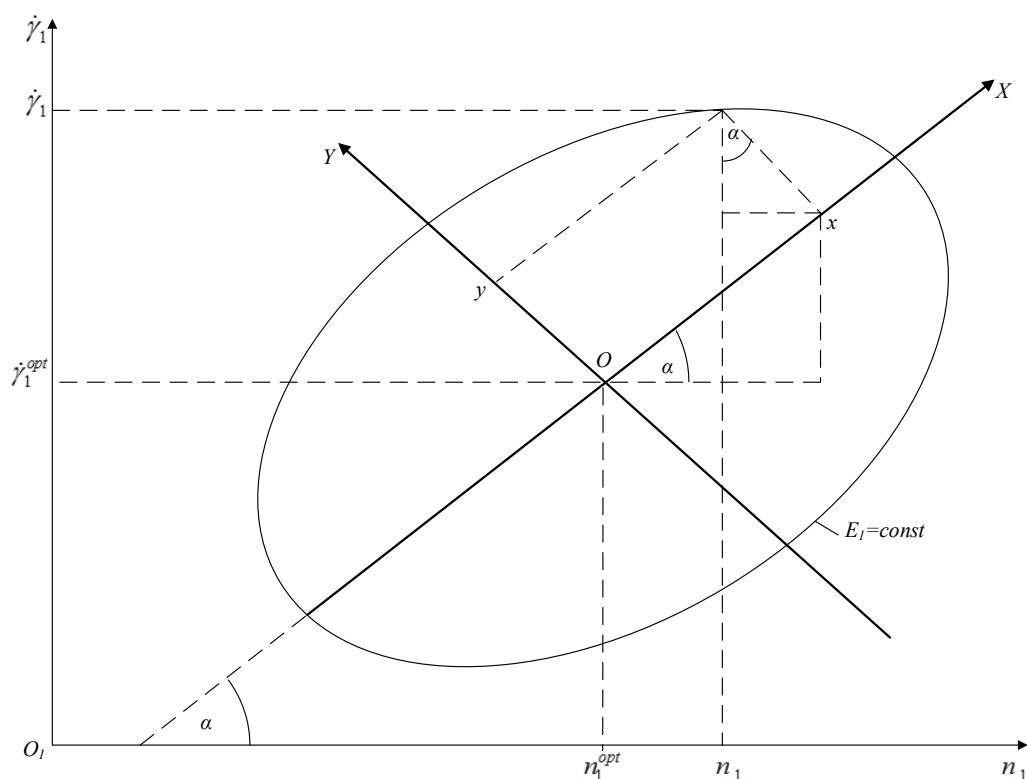


Рисунок 1 – Аппроксимируемая эллипсом линия постоянного значения средней относительной погрешности

Принимая во внимание это обстоятельство, в локальной системе координат  $XOY$  аппроксимирующую функцию (14) предлагается принять в виде



$$E_1(x, y) = E_1^{opt} + \frac{x^2}{b_x^2} + \frac{y^2}{b_y^2}, \quad (16)$$

где  $E_1^{opt}$ ,  $b_x$ ,  $b_y$  – неизвестные пока параметры;  $x$ ,  $y$  – координаты произвольной точки на поверхности эллиптического параболоида с уравнением (16), представляющие собой следующие функции параметров реологической модели

$$\begin{aligned} x(n_1, \dot{\gamma}_1) &= (n_1 - n_1^{opt}) \cdot \cos \alpha + (\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_1^{opt}) \cdot \sin \alpha; \\ y(n_1, \dot{\gamma}_1) &= (\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_1^{opt}) \cdot \cos \alpha - (n_1 - n_1^{opt}) \cdot \sin \alpha. \end{aligned} \quad (17)$$

Естественно, что наименьшее значение (в смысле минимума средней относительной погрешности) такой функции (16), соответствующее наилучшему набору  $\{n_1^{opt}, \dot{\gamma}_1^{opt}\}$  значений реологических параметров, достигается в центре семейства эллипсов и принимает некоторое значение

$$\min \{ E_1(n_1, \dot{\gamma}_1) \} = E_1(n_1^{opt}, \dot{\gamma}_1^{opt}) = E_1^{opt}.$$

Построенная в итоге аппроксимирующая функция (16) с учетом соотношений (17) содержит шесть параметров  $E_1^{opt}$ ,  $b_x$ ,  $b_y$ ,  $n_1^{opt}$ ,  $\dot{\gamma}_1^{opt}$ ,  $\alpha$ .

Для определения этих неизвестных пока параметров аппроксимирующей функции (16) с учетом (17) введем в рассмотрение следующую функцию невязки

$$F_2(E_1^{opt}, b_x, b_y, n_1^{opt}, \dot{\gamma}_1^{opt}, \alpha) = \sum_{j=j_0-\Delta j}^{j_0+\Delta j} \left\{ \sum_{k=k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} \left\{ E_1^{opt} + \frac{[x(n_1^j, \dot{\gamma}_1^k)]^2}{b_x^2} + \frac{[y(n_1^j, \dot{\gamma}_1^k)]^2}{b_y^2} - E_1^{jk} \right\}^2 \right\}, \quad (18)$$

где  $\Delta j$ ,  $\Delta k$  – целочисленные по своим значениям параметры, которые определяют подмножество элементов из множества  $E_1^{jk}$ , располагающихся в некоторой окрестности элемента с наименьшим значением  $E_1^{j_0 k_0}$  относительной погрешности.

Значения  $\Delta j$ ,  $\Delta k$  должны задаваться с учетом результатов предварительных численных экспериментов и выполнения очевидных условий

$$1 \leq j_0 - \Delta j; j_0 + \Delta j \leq J_1; 1 \leq k_0 - \Delta k; k_0 + \Delta k \leq K_1.$$

Выбор ограниченного числа элементов из множества  $E_1^{jk}$  для построения функции невязки (19) обусловлен следующими обстоятельствами.

С одной стороны, общее количество  $(J_1 \cdot K_1)$  обследуемых комбинаций пар  $\{n_1^j, \dot{\gamma}_1^k\}$  выбираемых параметров может оказаться значительным. С другой стороны, что более существенно, часть выбираемых априори значений параметров  $\{n_1^j, \dot{\gamma}_1^k\}$  может оказаться достаточно удаленной от реально оптимальных значений  $\{n_1^{opt}, \dot{\gamma}_1^{opt}\}$  этих параметров. Тогда можно ожидать, что вычисляемые в таких точках значения  $E_1^{jk}$  средней относительной





погрешности окажутся настолько большими, что внесут существенные поправки в аппроксимирующую функцию (16) и, соответственно, в числовые значения определяемых оптимальных параметров  $\{n_1^{opt}, \dot{\gamma}_1^{opt}\}$ .

Принимая теперь во внимание (17), выражение (18) может быть преобразовано и представлено в виде

$$F_{1,2}(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6) = \sum_{j=j_0-\Delta j}^{j_0+\Delta j} \left\{ \sum_{k=k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} \left\{ S_1 \cdot (n_1^j)^2 + S_2 \cdot n_1^j \cdot \dot{\gamma}_1^k + S_3 \cdot (\dot{\gamma}_1^k)^2 + S_4 \cdot n + S_5 \cdot \dot{\gamma}_1^k + S_6 - E_1^{jk} \right\}^2 \right\}. \quad (19)$$

Здесь  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$  представляют собой новые и неизвестные пока параметры функции невязки, которые выражаются через введенные ранее параметры  $E_1^{opt}, b_x, b_y, n_1^{opt}, \dot{\gamma}_1^{opt}, \alpha$  следующим образом

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\cos^2 \alpha}{b_x^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b_y^2}; \\ S_2 &= 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \left( \frac{1}{b_x^2} - \frac{1}{b_y^2} \right); \\ S_3 &= \frac{\sin^2 \alpha}{b_x^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{b_y^2}; \\ S_4 &= -2 \cdot S_1 \cdot n_1^{opt} - S_2 \cdot \dot{\gamma}_1^{opt}; \\ S_5 &= -n_1^{opt} \cdot S_2 - 2 \cdot \dot{\gamma}_1^{opt} \cdot S_3; \\ S_6 &= E_1^{opt} + S_1 \cdot (n_1^{opt})^2 + S_2 \cdot n_1^{opt} \cdot \dot{\gamma}_1^{opt} + S_3 \cdot (\dot{\gamma}_1^{opt})^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Значения этих параметров  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ , через которые из (20) могут быть определены параметры  $E_1^{opt}, b_x, b_y, n_1^{opt}, \dot{\gamma}_1^{opt}, \alpha$ , предлагается находить из условий минимума функции невязки (19), что приводит к необходимости решения следующей системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{n=1}^6 A_{mn} \cdot S_n = B_m; \quad m=1, 2, \dots, 6. \quad (21)$$

При этом коэффициенты такой системы определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \sum_{j=j_0-\Delta j}^{j_0+\Delta j} \left\{ \sum_{k=k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} (n_1^j)^4 \right\}; \\ A_{12} = A_{21} &= \sum_{j=j_0-\Delta j}^{j_0+\Delta j} \left\{ \sum_{k=k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} (n_1^j)^3 \cdot \dot{\gamma}_1^k \right\}; \\ A_{13} = A_{22} = A_{31} &= \sum_{j=j_0-\Delta j}^{j_0+\Delta j} \left\{ \sum_{k=k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} (n_1^j)^2 \cdot (\dot{\gamma}_1^k)^2 \right\}; \end{aligned}$$



$$A_{14} = A_{41} = \sum_{j=j_0-\Delta j}^{j_0+\Delta j} \left\{ \sum_{k=k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} (n_1^j)^3 \right\};$$

$$A_{15} = A_{24} = A_{42} = A_{51} = \sum_{j=j_0-\Delta j}^{j_0+\Delta j} \left\{ \sum_{k=k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} (n_1^j)^2 \cdot \gamma_1^k \right\};$$

$$A_{16} = A_{44} = A_{61} = \sum_{j=j_0-\Delta j}^{j_0+\Delta j} \left\{ \sum_{k=k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} (n_1^j)^2 \right\};$$

$$A_{23} = A_{32} = \sum_{j=j_0-\Delta j}^{j_0+\Delta j} \left\{ \sum_{k=k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} n_1^j \cdot (\gamma_1^k)^3 \right\};$$

$$A_{25} = A_{34} = A_{43} = A_{52} = \sum_{j=j_0-\Delta j}^{j_0+\Delta j} \left\{ \sum_{k=k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} n_1^j \cdot (\gamma_1^k)^2 \right\};$$

$$A_{26} = A_{45} = A_{54} = A_{62} = \sum_{j=j_0-\Delta j}^{j_0+\Delta j} \left\{ \sum_{k=k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} n_1^j \cdot \gamma_1^k \right\};$$

$$A_{33} = \sum_{j=j_0-\Delta j}^{j_0+\Delta j} \left\{ \sum_{k=k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} (\gamma_1^k)^4 \right\};$$

$$A_{35} = A_{53} = \sum_{j=j_0-\Delta j}^{j_0+\Delta j} \left\{ \sum_{k=k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} (\gamma_1^k)^3 \right\};$$

$$A_{36} = A_{55} = A_{63} = \sum_{j=j_0-\Delta j}^{j_0+\Delta j} \left\{ \sum_{k=k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} (\gamma_1^k)^2 \right\};$$

$$A_{46} = A_{64} = \sum_{j=j_0-\Delta j}^{j_0+\Delta j} \left\{ \sum_{k=k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} (n_1^j) \right\};$$

$$A_{56} = A_{65} = \sum_{j=j_0-\Delta j}^{j_0+\Delta j} \left\{ \sum_{k=k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} (\gamma_1^k) \right\};$$

$$A_{56} = (2 \cdot \Delta j + 1) \cdot (2 \cdot \Delta k + 1);$$

$$B_1 = \sum_{j=j_0-\Delta j}^{j_0+\Delta j} \left\{ \sum_{k=k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} (n_1^j)^2 \cdot E_1^{jk} \right\};$$

$$B_2 = \sum_{j=j_0-\Delta j}^{j_0+\Delta j} \left\{ \sum_{k=k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} n_1^j \cdot \gamma_1^k \cdot E_1^{jk} \right\};$$

$$B_3 = \sum_{j=j_0-\Delta j}^{j_0+\Delta j} \left\{ \sum_{k=k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} (\dot{\gamma}_1^k)^2 \cdot E_1^{jk} \right\};$$

$$B_4 = \sum_{j=j_0-\Delta j}^{j_0+\Delta j} \left\{ \sum_{k=k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} n_1^j \cdot E_1^{jk} \right\};$$

$$B_5 = \sum_{j=j_0-\Delta j}^{j_0+\Delta j} \left\{ \sum_{k=k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} \dot{\gamma}_1^k \cdot E_1^{jk} \right\};$$

$$B_6 = \sum_{j=j_0-\Delta j}^{j_0+\Delta j} \left\{ \sum_{k=k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} E_1^{jk} \right\}.$$



После решения системы уравнений (21) и определения набора параметров  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ , соотношения (20) можно рассматривать как систему уравнений для вычисления значений параметров  $E_1^{opt}, b_x, b_y, n_1^{opt}, \dot{\gamma}_1^{opt}, \alpha$ . В частности, четвертое и пятое уравнения этой системы образуют самостоятельную подсистему двух линейных алгебраических уравнений относительно следующих искомых параметров  $n_1^{opt}$  и  $\gamma_1^{opt}$  реологической модели. Решая эту подсистему, находим

$$\begin{aligned} n_1^{opt} &= \frac{S_2 \cdot S_5 - 2 \cdot S_3 \cdot S_4}{4 \cdot S_1 \cdot S_3 - S_2^2}; \\ \gamma_1^{opt} &= \frac{S_2 \cdot S_4 - 2 \cdot S_1 \cdot S_5}{4 \cdot S_1 \cdot S_3 - S_2^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Ожидаемое наименьшее значение средней относительной погрешности определяется теперь с учетом (22) из шестого уравнения системы (20)

$$E_1^{opt} = S_6 - S_1 \cdot (n_1^{opt})^2 - S_2 \cdot n_1^{opt} \cdot \gamma_1^{opt} - S_3 \cdot (\gamma_1^{opt})^2.$$

Для вычисления двух, оставшихся пока не определенными, параметров  $\tau_1^{opt}$  и  $k_1^{opt}$  реологической модели на первом диапазоне изменения скорости сдвига необходимо вновь рассмотреть функцию невязки (9), но принимая уже во внимание найденные значения (22). Тогда эти два параметра могут быть определены из соотношений (10), основные коэффициенты которых определяются теперь уже из выражений

$$\begin{aligned} C_{11} &= I_1; \quad C_{12} = \sum_{i=1}^{I_1} f_1(\dot{\gamma}_i, n_1^{opt}, \dot{\gamma}_1^{opt}); \quad D_1 = \sum_{i=1}^{I_1} \tau_i; \\ C_{21} &= C_{12}; \quad C_{22} = \sum_{i=1}^{I_1} [f_1(\dot{\gamma}_i, n_1^{opt}, \dot{\gamma}_1^{opt})]^2; \quad D_2 = \sum_{i=1}^{I_1} \tau_i \cdot f_1(\dot{\gamma}_i, n_1^{opt}, \dot{\gamma}_1^{opt}). \end{aligned}$$

Таким образом, определив числовые значения основных параметров  $\tau_1^{opt}, k_1^{opt}, n_1^{opt}, \gamma_1^{opt}$  реологической модели, уравнение для кривой течения на первом диапазоне изменения скорости сдвига принимает вид

$$\tau(\dot{\gamma}) = \tau_1^{opt} + k_1^{opt} \cdot f_1(\dot{\gamma}, n_1^{opt}, \dot{\gamma}_1^{opt}).$$

Подобным образом предлагается определять параметры реологической модели (2) и на каждом из оставшихся трех диапазонов изменения скорости сдвига. При этом, естественно, необходимо обеспечить выполнение дополнительных условий (5).

**Выводы.** Предложенная реологическая модель обеспечивает более точное описание механического поведения суспензий мелкодисперсных частиц, учитывая, в том числе, немонотонный характер зависимости касательного напряжения от скорости сдвига. При этом, такая модель позволяет для одномерных сдвиговых течений получать решения в аналитической форме, что представляет интерес с точки зрения построения инженерных методик расчета гидродинамических характеристик при течении суспензий такого рода в каналах и проточных элементах оборудования. Разработанная методика обработки экспериментальных данных для определения параметров реологической модели, будучи представленной в форме законченного алгоритма, позволяет непосредственно использовать ее в системах компьютерной алгебры, например, типа Mathcad.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Young Sil Lee., Wagner N.J. Dynamic properties of shear thickening colloidal suspensions // *Rheologica Acta*, 2003. V. 42, Issue 3, P. 199–208.
2. Egres R.G., Wagner N.J. The rheology and microstructure of acicular precipitated calcium carbonate colloidal suspensions through the shear thickening transition // *J. Rheol.*, 2005. V. 49 (3). P. 719–746.
3. Bischoff White T.T., Chellamuthu M., Rothstein J.P. Extensional rheology of a shear-thickening cornstarch and water suspension // *Rheologica Acta*, 2010. V. 49. Issue 2. P. 119–129.
4. Seto R., Mari R., Morris J.F., Denn M.M. Discontinuous shear thickening of frictional hard-sphere suspensions // *Physical Review Letters*. 2013. V. 111. № 21. Article ID 218301. 5 p.
5. Broun E., Jaeger H.M. Shear thickening in concentrated suspension: phenomenology, mechanisms and relations to jamming // *Reports on Progress in Physics*. 2014. V. 77. 046602. 23 p.
6. Kaldasch J., Senge B., Laven J. Shear Thickening in Concentrated Soft Sphere Colloidal Suspensions: A Shear Induced Phase Transition // *Journal of Thermodynamics*. 2015. Article 153854. 10 pages.
7. Jie Ding., Weihua Li., Shen S.Z. Research and Applications of Shear Thickening Fluids // *Recent Patents on Materials Science*, 2011. V. 4. № 1. P. 43–49.
8. Yun Tao Sun, Xiao Dong Liu, Guo Peng Tian, Hong Shuang Han. Analysis of the D3O materials in baseball protective clothing // *Applied Mechanics and Materials*, 2012. V. 217–219. P. 1174–1177.
9. Wiśniewski A. Nanotechnology for increase of body protection capability // *Problemy Techniki Uzbrojenia*, 2008. V. R. 37. z. 107. P. 7–14.
10. Рябов К. Жидкая «броня» специальный гель D3O. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://prospb.com/zhidkaya-bronya-spetsialnyj-gel-d3o/> (дата обращения 25.11.2020).
11. Колодежнов В.Н. Моделирование вращательного течения между коаксиальными цилиндрами для жидкости с эффектом отвердевания // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*, 2014. № 3. С. 3–14.
12. Колодежнов В.Н. Моделирование течения вязкопластических жидкостей, демонстрирующих проявление эффекта «отвердевания» // *XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Сб. докладов. Казань: Изд-во Казан. ун-та*, 2015. С. 1908–1910.

REFERENCES

1. Young Sil Lee., Wagner N.J. Dynamic properties of shear thickening colloidal suspensions // *Rheologica Acta*, 2003. V. 42, Issue 3, pp. 199–208.
2. Egres R.G., Wagner N.J. The rheology and microstructure of acicular precipitated calcium carbonate colloidal suspensions through the shear thickening transition // *J. Rheol.*, 2005. V. 49 (3). pp. 719–746.
3. Bischoff White T.T., Chellamuthu M., Rothstein J.P. Extensional rheology of a shear-thickening cornstarch and water suspension // *Rheologica Acta*, 2010. V. 49. Issue 2. pp. 119–129.
4. Seto R., Mari R., Morris J.F., Denn M.M. Discontinuous shear thickening of frictional hard-sphere suspensions // *Physical Review Letters*. 2013. V. 111. № 21. Article ID 218301. 5 p.
5. Broun E., Jaeger H.M. Shear thickening in concentrated suspension: phenomenology, mechanisms and relations to jamming // *Reports on Progress in Physics*. 2014. V. 77. 046602. 23 p.
6. Kaldasch J., Senge B., Laven J. Shear Thickening in Concentrated Soft Sphere Colloidal Suspensions: A Shear Induced Phase Transition // *Journal of Thermodynamics*. 2015. Article 153854. 10 pages.



7. Jie Ding., Weihua Li., Shen S.Z. Research and Applications of Shear Thickening Fluids // Recent Patents on Materials Science, 2011. V. 4. № 1. pp. 43–49.

8. Yun Tao Sun, Xiao Dong Liu, Guo Peng Tian, Hong Shuang Han. Analysis of the D3O materials in baseball protective clothing // Applied Mechanics and Materials, 2012. V. 217–219. pp. 1174–1177.

9. Wiśniewski A. Nanotechnology for increase of body protection capability // Problemy Techniki Uzbrojenia, 2008. V. R. 37. z. 107. pp. 7–14.

10. Ryabov K. Zhidkaya «bronya» special'nyj gel' D3O. [Elektronnyj resurs]. Rezhim dostupa: <http://prospb.com/zhidkaya-bronya-spetsialnyj-gel-d3o/> (data obrascheniya 25.11.2020).

11. Kolodezhnov V.N. Modelirovanie vraschatel'nogo techeniya mezhdu koaksial'nymi cilindrami dlya zhidkosti s `effektom otverdevaniya // Izvestiya RAN. Mehanika zhidkosti i gaza, 2014. № 3. pp. 3–14.

12. Kolodezhnov V.N. Modelirovanie techeniya vyazkoplasticheskikh zhidkостей, demonstriruyuschih proyavlenie `effekta «otverdevaniya» // XI Vserossijskij s`ezd po fundamental'nyim problemam teoreticheskoy i prikladnoj mehaniki: Sb. dokladov. Kazan': Izd-vo Kazan. un-ta, 2015. pp. 1908–1910.

© Колодежнов В.Н., 2021

Колодежнов Владимир Николаевич, доктор технических наук, профессор кафедры общепрофессиональных дисциплин, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А, kvn117@mail.ru.