



УДК 621.317.7.087.92  
ГРНТИ 59.29.71

## ПРИМЕНЕНИЕ ЕМКОСТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ СРЕД С ЧЕРЕДУЮЩИМИСЯ СЛОЯМИ В ВОЗДУХОРАЗДЕЛИТЕЛЬНЫХ УСТАНОВКАХ ВОЕННОГО НАЗНАЧЕНИЯ

*И.Н. НАЗАРЕНКО, кандидат химических наук, доцент  
ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)  
А.В. ХОРВАТ, кандидат технических наук  
ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)  
В.И. КАШНИКОВ, кандидат географических наук, доцент  
ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)*

Проведено сравнение решения обобщенной задачи Дирихле для уравнения Лапласа и метода конформных отображений по модели Игрея применительно к описанию изменения емкости накладного измерительного конденсатора в процессе увеличения толщины осадка на его поверхности. Показано удовлетворительное соответствие экспериментальных и теоретических значений для этих расчетных методов в случае слоистой системы, представленной как псевдооднородная среда с эффективным значением диэлектрической проницаемости.

*Ключевые слова:* накладные измерительные конденсаторы, емкость, уравнение Лапласа, конформные отображения, слоистые осадки.

## CAPACITIVE TRANSDUCERS APPLICATION FOR DETECTING CAVITIES WITH ALTERNATING LAYERS IN MILITARY AIR SEPARATION INSTALLATIONS

*I.N. NAZARENKO, Candidate of Chemical sciences, Associate Professor  
MESC AF «N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy» (Voronezh)  
A.V. HORVAT, Candidate of Technical sciences  
MESC AF «N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy» (Voronezh)  
V.I. KASHNIKOV, Candidate of Geographical sciences, Associate Professor  
MESC AF «N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy» (Voronezh)*

A comparison of the solution of the generalized Dirichlet problem for the Laplace equation and the method of conformal maps based on the model of Measurement in relation to the description of changes in the capacitance of an overhead measuring capacitor in the process of increasing the thickness of the sediment on its surface is carried out. A satisfactory correspondence of the experimental and theoretical values for these calculation methods in the case of a layered system represented as a pseudo-homogeneous milieu with an effective permittivity value is shown.

*Keywords:* overhead measuring capacitors, capacitance, Laplace equation, conformal maps, layered precipitation.

**Введение.** Накопление любых твердых веществ внутри криогенной аппаратуры потенциально опасно для нормального функционирования воздухоразделительных установок. Одним из средств повышения безопасности использования воздухоразделительных установок является оснащение средствами контроля наличия твердых частиц как в объеме криожидкостей, так и на внутренних поверхностях, контактирующих с газовой фазой, обогащенной кислородом. Для перманентного контроля процесса накопления инородной фазы было



предложено использовать устройства на основе накладных измерительных конденсаторов (НИК) с электродами гребенчатой формы [1]. Так же, путем решения обобщенной задачи Дирихле (с особенностями) для уравнения Лапласа, были получены формулы [2] для расчета емкости трехслойной системы:

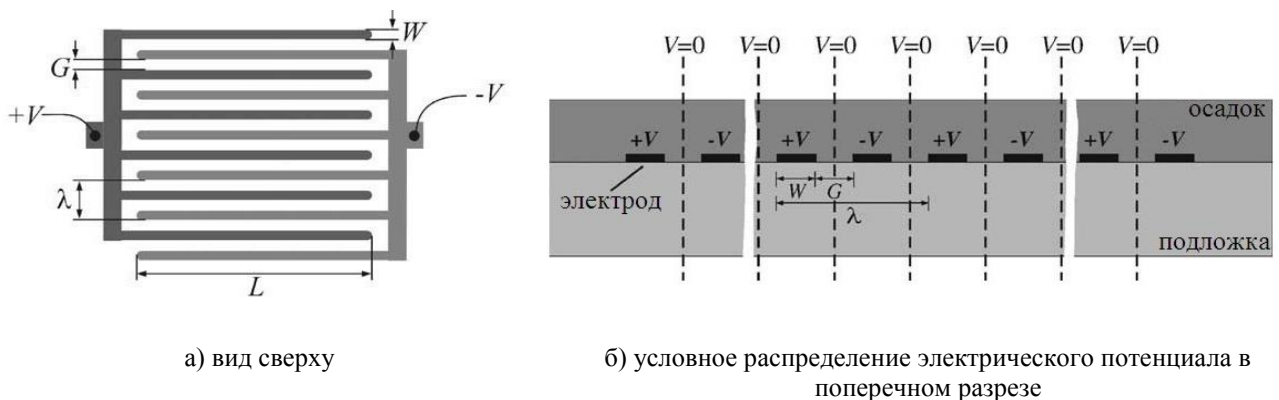
- 1) подложка конечной толщины  $H$ , экранированная снизу;
- 2) слой конечной толщины  $h$ ;
- 3) полубесконечная среда над слоем. Общее решение представляет собой быстро сходящийся ряд

$$C(h, H) = \frac{16\varepsilon_0 S}{a\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \left\{ \varepsilon_1 \frac{\tilde{\omega}_k + 1}{\tilde{\omega}_k - 1} + \varepsilon_2 \frac{\omega_k - q}{\omega_k + q} \right\}, \quad (1)$$

$$\omega_k = e^{\frac{2(2k+1)\pi h}{a}}, \quad \tilde{\omega}_k = e^{\frac{2(2k+1)\pi H}{a}}, \quad q = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3},$$

где  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная  $8,854 \cdot 10^{-12}$  Ф/м;  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  – диэлектрические проницаемости подложки, слоя и окружающей среды;  $S$  – площадь НИК;  $a$  – сумма ширины одной ламели и ширины зазора между ламелями (полупериод решетки из ламелей). Из рисунка 1 видно, что  $a = \lambda/2 = W + G$ .

**Актуальность.** Ранее было проведено сравнение применимости различных способов расчета толщины осадков на поверхности НИК [3]. С выражением (1) сравнивались расчеты по методу конформных отображений в рамках двух приближенных моделей: Ву (Wu) и Геворгяна (Gevorgian), которые оказались малоприменимы для описания слоистых структур, представленных как псевдооднородные среды, характеризующиеся эффективной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_{eff}$ . В настоящее время наиболее адекватной и универсальной моделью, использующей конформные отображения, считается модель Игрея (Igreja). После первой публикации [4] она была существенно дополнена и расширена [5]. Подробное описание модели Игрея для многослойных систем представлено в [6].



$L$  – эффективная длина ламелей,  $W$  – ширина ламели,  $G$  – ширина зазора,  $\lambda$  – период решетки из ламелей

Рисунок 1 – Схема НИК гребенчатой формы

**Модель Игрея.** Как и все подобные модели, модель Игрея основана на методе частичных емкостей Кочанова [7]. Согласно этому методу, емкость НИК может быть представлена как совокупность его отдельных частей: емкости полей рассеяния в окружающем пространстве (вакуум, воздух или любая другая полубесконечная среда) и емкостей слоев, находящихся над и под плоскостью, на которой находятся электроды.



Структура емкостного датчика разбивается на внутренние (interior) и внешние (external) секции, имеющие емкость  $C_I$  и  $C_E$  соответственно. Это показано на рисунке 2.



Рисунок 2 – Схема гребенчатого конденсатора, модель Игрия

Для структур с двумя и более диэлектрическими слоями используются два несколько отличающихся алгоритма расчетов – метод параллельных частичных емкостей PPC (parallel partial capacitance) и метод последовательных частичных емкостей SPC (series partial capacitance). PPC применяется в случае, когда диэлектрическая постоянная  $\epsilon$  слоев убывает при удалении от плоскости, на которой расположены электроды. SPC применяется в обратной ситуации – наружные слои имеют большее значение  $\epsilon$  относительно внутренних. Далее будет подробно рассмотрен метод PPC, так как он чаще встречается на практике. Например, для расчета простейших, однослойных структур.

В общем случае суммарная емкость в методе PPC определяется как

$$C = (N - 3) \frac{C_I}{2} + 2 \left( \frac{C_I C_E}{C_I + C_E} \right), \quad N > 3, \quad (2)$$

где  $N$  – общее число ламелей.

На рисунке 3 приведена эквивалентная схема, поясняющая суть этого выражения.

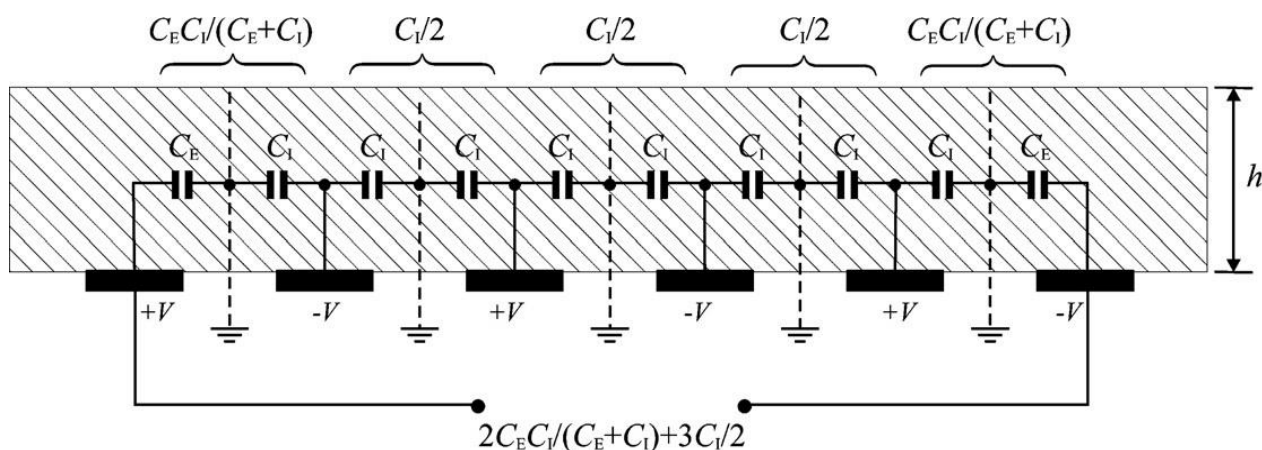


Рисунок 3 – Эквивалентная электрическая схема НИК в модели Игрия

Уравнение (2) получено для так называемой открытой конфигурации: над поверхностью осадка находится однородная, достаточно протяженная диэлектрическая среда, которую можно считать полубесконечной.



Величины  $C_I$  и  $C_E$  находятся по уравнениям

$$C_I = \varepsilon_0 L \left( \varepsilon_n \frac{K(k'_{n,I})}{K(k_{n,I})} + \sum_{i=1}^{n-1} (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) \frac{K(k'_{i,I})}{K(k_{i,I})} \right), \quad (3)$$

$$C_E = \varepsilon_0 L \left( \varepsilon_n \frac{K(k'_{n,E})}{K(k_{n,E})} + \sum_{i=1}^{n-1} (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) \frac{K(k'_{i,E})}{K(k_{i,E})} \right). \quad (4)$$

В этих выражениях  $K(k)$  и  $K(k')$  – полные эллиптические интегралы первого рода от модуля  $k$  и дополнительного модуля  $k'$ . Основной и дополнительный модули связаны элементарным соотношением

$$k' = \sqrt{1 - k^2}. \quad (5)$$

Технически наиболее сложным моментом расчета является нахождение основных модулей. При расчете модулей эллиптических интегралов используются три (в случае  $C_E$ ) или четыре (для  $C_I$ ) последовательных конформных преобразований.

В модели Игрея переменные, имеющие размерность длины  $W$ ,  $G$ ,  $\lambda$ ,  $h$  заменены безразмерными параметрами  $\eta$  – степень металлизации поверхности, занимаемой датчиком и  $r$  – отношение учетверенной толщины слоя осадка к периоду следования ламелей

$$\eta = \frac{W}{W + G} = \frac{2W}{\lambda}, \quad (6)$$

$$r = \frac{2h}{W + G} = \frac{4h}{\lambda}. \quad (7)$$

**Формулы для расчетов.** К сожалению, в работах [4, 5], определивших основные подходы к решению рассматриваемой задачи, содержится ряд ошибок и опечаток, не позволяющих получить корректный результат. Работа Блюма [6] в основном устраняет эту проблему.

В таблице 1 представлены скорректированные формулы для построения цепочки расчетов по модели Игрея.

Таблица 1 – Формулы для расчета при использовании метода параллельных частичных емкостей (PPS) для системы с одним слоем

Вид подложки	Внутренние секции	Внешние секции
Слой конечной толщины	$C_I = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{K(k'_1)}{K(k_1)}$ $k_1 = \sqrt{\frac{(k+1)(1-t_B)}{2(1-kt_B)}}$ $t_B = \operatorname{sn}(K(k)(2\eta), m), \quad m = k^2$ $k = \left( \frac{\nu_2(0, q)}{\nu_3(0, q)} \right)^2$ $q = e^{-4\pi r}$	$C_E = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{K(k'_E)}{K(k_E)}$ $k_E = \sqrt{\frac{t_A(t_B - 1)}{t_B(t_A - 1)}}$ $t_A = ch^2 \left( \frac{\pi(1+\eta)}{2r} \right)$ $t_B = ch^2 \left( \frac{\pi(1-\eta)}{2r} \right)$



Продолжение таблицы 1

<p>Полубесконечная среда (окружающая среда)</p>	$C_1 = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{K(k_1)}{K(k_1)}$ $k_1 = \sqrt{t_B + 1}$ $t_B = sh^2 \left( j \frac{\pi \eta}{2} \right)$	$C_E = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{K(k_E)}{K(k_E)}$ $k_E = \sqrt{t_B + 1}$ $t_B = -\frac{4\eta}{(\eta + 1)^2}$
---	---	--

В таблице используются следующие специальные и тригонометрические функции:  $sn(a, b)$  – эллиптический синус,  $v_2(0, q)$  и  $v_3(0, q)$  – тета-функции Якоби,  $sh(x)$  и  $ch(x)$  – гиперболические синус и косинус.

Сложность представляет нахождение значений  $k$  по формуле

$$k = \left( \frac{v_2(0, q)}{v_3(0, q)} \right)^2. \tag{8}$$

Альтернативой является способ, предложенный в [8]. Сначала находится начальное значение модуля  $k$

$$k = 4\sqrt{q} \prod_{i \geq 1} \left( \frac{1 + q^{2i}}{1 + q^{2i-1}} \right)^4. \tag{9}$$

Затем минимизируется целевая функция вида

$$f(k) = e^{-\frac{\pi K(k')}{K(k)}} - q. \tag{10}$$

**Аппроксимация Гилберта.** Так как во многих случаях в ходе выполнения расчетов сами значения эллиптических интегралов  $K(k)$  и  $K(k')$  не используются по отдельности, а нужно знать только их отношение, то, как правило, принимают что

$$\frac{K(k)}{K(k')} \approx \begin{cases} \frac{\pi}{2 \ln \left( 2\sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \right)}, & \text{для } k = \left[ 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \\ \frac{2}{\pi} \ln \left( 2\sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \right), & \text{для } k = \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right] \\ 1, & \text{для } k = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}. \tag{11}$$

Это одна из трех аппроксимаций, наиболее простая математически и наименее точная из предложенных Гилбертом в [9]. Именно она и используется чаще всего при расчетах такого рода. В тоже время, возможности современной вычислительной техники позволяют достаточно быстро находить численные значения интегралов  $K(k)$  и  $K(k')$  с относительными погрешностями менее  $10^{-8}$  по формуле, связывающей полные эллиптические интегралы первого рода с рекуррентным арифметико-геометрическим средним Гаусса ( $agM$ ):



$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \frac{\pi}{2 \operatorname{agM}(1, \cos k)}. \quad (12)$$

Нами было проведено сравнение значений  $\frac{K(k)}{K(k')}$  рассчитанных по (11) и (12) в интервале значений  $k = [0,001 \dots 0,999]$ . Результаты представлены на рисунке 4.

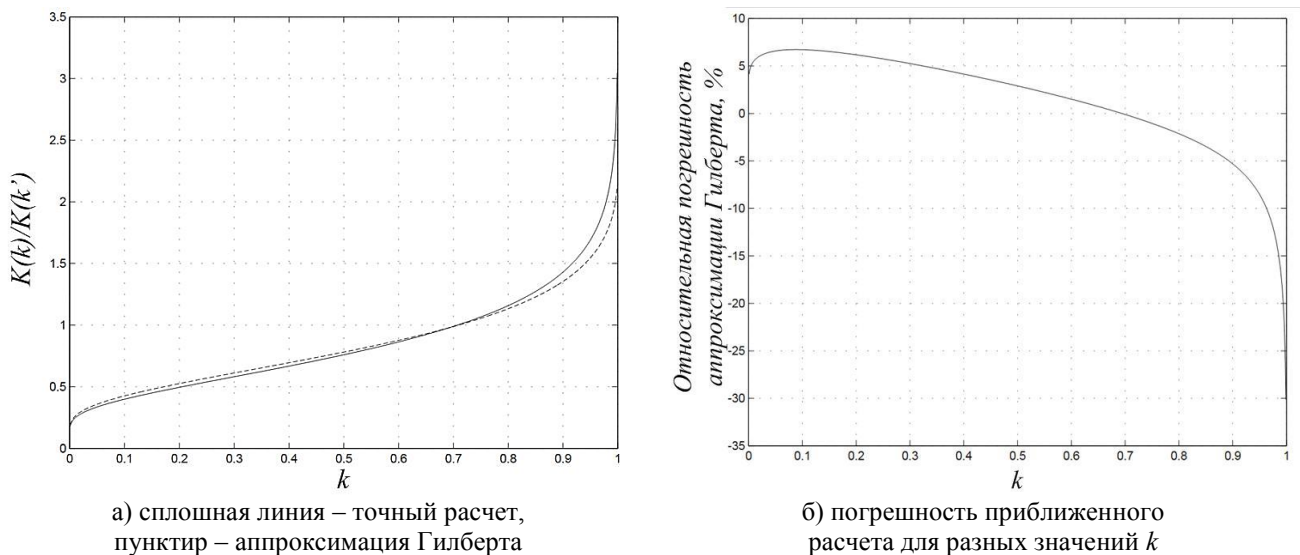


Рисунок 4 – Сравнение аппроксимации Гилберта с точным решением

Из рисунка видно, что удовлетворительная погрешность приближенных вычислений на уровне  $\pm 5\%$  имеет место только в интервале  $k=[0,32 \dots 0,89]$ . Поэтому в данной работе аппроксимация Гилберта не использовалась.

**Сравнение с экспериментом.** Были проведены расчеты для многослойной структуры полиэтилен (ПЭ)/воздух: .../ПЭ/воздух/ПЭ/воздух/..., в которой чередующиеся слои отличаются по диэлектрическим свойствам [3]. Такая структура в первом приближении может быть представлена как суперпозиция псевдооднородных слоев, если в качестве «элементарного» слоя (ЭС) рассматривать сегмент .../ПЭ/воздух/...: .../ЭС/ЭС/ЭС/... Система таких слоев (стопа) является также псевдооднородной, а значит, может рассматриваться как монолитный диэлектрик, имеющий эффективную диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon_{eff}$ .

Для измерения емкости стоп ПЭ, состоящих из 1...87 слоев, использовался НИК из 16 ламелей с параметрами  $L=55$  мм,  $W=2$  мм,  $G=2$  мм,  $\lambda=4$  мм (рисунок 1). Экспериментальные данные и кривые, соответствующие двум аппроксимациям, показаны на рисунке 5.

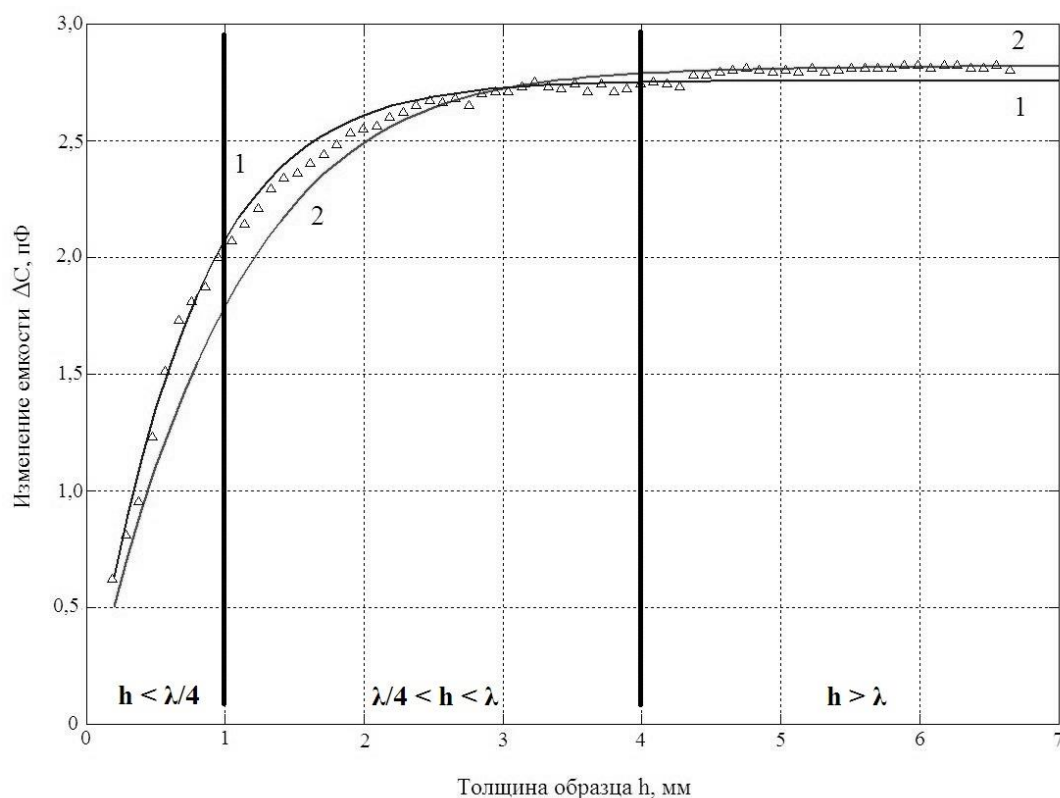
Область рисунка 5 разбита на 3 части в соответствии с характером зависимости  $\Delta C = f(h)$ :

I – быстрое, близкое к линейному изменение  $\Delta C$  ( $h < \lambda/4$ );

II – переходная область  $\Delta C$  ( $\lambda/4 < h < \lambda$ );

III – область «насыщения» кривой  $\Delta C = f(h)$  ( $h > \lambda$ ).

Следует отметить, что расчеты по модели Игрея весьма трудоемки и требуют заметных затрат времени даже на современных персональных компьютерах. Профилирование исполняемых участков кода в среде MATLAB показало, что скорость вычислений по уравнению (1) на 4,5 порядка больше, чем цепочки формул, приведенных в таблице 1. Так, на создание вектора величин, по которым было сделано построение кривых на рисунке 5, затраты времени составили 0,007 с для кривой 1 и 266 с для кривой 2.



1 – решение задачи Дирихле при  $\epsilon_{\text{eff}} = 1,67$ , 2 – в соответствии с моделью Игрея для  $\epsilon_{\text{eff}} = 1,75$ ,  
 $\Delta$  – эксперимент

Рисунок 5 – Изменение емкости слоистой структуры полиэтилен-воздух в зависимости от толщины

**Выводы.** Представленные подходы удовлетворительно описывают эксперимент, но на начальном этапе (I) и в переходной области (II) более «удачным» является решение задачи Дирихле, а в области «насыщения» кривой (III) решение, основанное на многократных конформных отображениях, предложенное Игреем. Кроме того, при решении обратной задачи определения неизвестной толщины по измеренному значению  $\Delta C$  в случае применения метода конформных отображений требуется использование дополнительных оптимизационных процедур. В тоже время, для решения, полученного из уравнения Лапласа известна функциональная связь  $h = f(\Delta C)$  [2]. Это позволит получить численное значение толщины примесей, образующихся в криожидкостях и седиментирующих на внутренних поверхностях куба ректификационных колонн и трубопроводов при разработке накладных конденсаторов и на их основе системы контроля функционирования воздуходелительных установок военного назначения по взрывопожароопасным показателям.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов А.В., Хорват А.В., Назаренко И.Н. Модель электроемкостного датчика системы мониторинга воздуходелительных установок // Современные наукоемкие технологии. 2016. № 1–2. С. 248–252.
2. Хорват А.В. Определение емкостных характеристик гребенчатого конденсатора для анализа толщины диэлектрического покрытия // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. Тамбов. 2017. Т. 22. Вып. 1. С. 69–74.
3. Назаренко И.Н., Хорват А.В., Бородкин С.В. Методы расчета диэлектрического слоя для емкостных систем обнаружения опасных примесей в воздуходелительных установках //



Воздушно-космические силы. Теория и практика. 2018. № 5. С. 80–93. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://vva.mil/ru/izdaniay/VKS-teoriya-i-praktika/Nomerazhurnala/2> (дата обращения 20.12.2019).

4. Igreja R., Dias C. J. Analytical evaluation of the interdigital electrodes capacitance for a multi-layered structure // *Sensors and Actuators A.: Physical*. 2004. V. 112. P. 291–301.

5. Igreja R., Dias C. J. Extension to the analytical model of the interdigital electrodes capacitance for a multi-layered structure // *Sensors and Actuators A.: Physical*, 2011. V. 172, № 2. P. 392–399.

6. Blume S.O.P., Ben-Mrad R., Sullivan P.E. Modelling the capacitance of multi-layer conductorfacing interdigitated electrode structures // *Sensors and Actuators B: Chemical*. 2015. V. 213. P. 423–433.

7. Кочанов Э.С. Емкость планарной полосковой линии с учетом толщины диэлектрической подложки // *Радиотехника*. 1975. Т. 30. Вып. 7. С. 92–94.

8. Luther W., Otten W. Reliable Computation of Elliptic Functions // *J. of Universal Computer Science*, 1998. V. 4. № 1. P. 25–33.

9. Hilberg W. From approximation to exact relations for characteristic impedans // *IEEE on Microwave and Techniques*. 1969. V. 17. № 5. P. 259–264.

#### REFERENCES

1. Ivanov A.V., Horvat A.V., Nazarenko I.N. Model' `elektroemkostnogo datchika sistemy monitoringa vozduhorazdelitel'nyh ustanovok // *Sovremennye naukoemkie tehnologii*. 2016. № 1–2. pp. 248–252.

2. Horvat A.V. Opredelenie emkostnyh harakteristik grebenchatogo kondensatora dlya analiza tolschiny di`elektricheskogo pokrytiya // *Vestnik Tambovskogo universiteta. Ser. Estestvennye i tehnicheckie nauki*. Tambov. 2017. T. 22. Vyp. 1. pp. 69–74.

3. Nazarenko I.N., Horvat A.V., Borodkin S.V. Metody rascheta di`elektricheskogo sloya dlya emkostnyh sistem obnaruzheniya opasnyh primesej v vozduhorazdelitel'nyh ustanovkah // *Vozdushno-kosmicheskie sily. Teoriya i praktika*. 2018. № 5. pp. 80–93. [Elektronnyj resurs]. Rezhim dostupa: <http://vva.mil/ru/izdaniay/VKS-teoriya-i-praktika/Nomerazhurnala/2> (data obrascheniya 20.12.2019).

4. Igreja R., Dias C. J. Analytical evaluation of the interdigital electrodes capacitance for a multi-layered structure // *Sensors and Actuators A.: Physical*. 2004. V. 112. pp. 291–301.

5. Igreja R., Dias C. J. Extension to the analytical model of the interdigital electrodes capacitance for a multi-layered structure // *Sensors and Actuators A.: Physical*, 2011. V. 172, № 2. pp. 392–399.

6. Blume S.O.P., Ben-Mrad R., Sullivan P.E. Modelling the capacitance of multi-layer conductorfacing interdigitated electrode structures // *Sensors and Actuators B: Chemical*. 2015. V. 213. pp. 423–433.

7. Kochanov `E.S. Emkost' planarnoj poloskovoj linii s uchetom tolschiny di`elektricheskoy podlozhki // *Radiotekhnika*. 1975. T. 30. Vyp. 7. pp. 92–94.

8. Luther W., Otten W. Reliable Computation of Elliptic Functions // *J. of Universal Computer Science*, 1998. V. 4. № 1. pp. 25–33.

9. Hilberg W. From approximation to exact relations for characteristic impedans // *IEEE on Microwave and Techniques*. 1969. V. 17. № 5. pp. 259–264.

© Назаренко И.Н., Хорват А.В., Кашников В.И., 2020

Назаренко Игорь Николаевич, кандидат химических наук, доцент, старший научный сотрудник научно-исследовательского центра (проблем применения, обеспечения и управления авиацией Военно-воздушных сил), Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А, z31415926@mil.ru.





Хорват Алексей Владимирович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник отдела научно-исследовательского научно-исследовательского центра (проблем применения, обеспечения и управления авиацией Военно-воздушных сил), Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А, alexey-khorvat@yandex.ru.

Кашников Владимир Иванович, кандидат географических наук, доцент, старший научный сотрудник отдела научно-исследовательского научно-исследовательского центра (проблем применения, обеспечения и управления авиацией Военно-воздушных сил), Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А.