УДК 355.23.001
ГРНТИ 78.25.41

ФОРМИРОВАНИЕ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЫ В ПРОЦЕССЕ РУКОВОДСТВА ВОЕННО-НАУЧНОЙ РАБОТОЙ КУРСАНТОВ В ВОЕННОМ ВУЗЕ

В.И. СЫСОЕВА, кандидат педагогических наук, доцент
ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)
С.С. НОВИКОВА, кандидат педагогических наук, доцент
ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)

В статье рассмотрены постановки и математические модели некоторых прикладных оптимизационных задач, которые в качестве заданий предлагались авторами курсантам военного вуза в процессе руководства их работой в военно-научном обществе. В результате работы курсантами был освоен и программно реализован ряд алгоритмов дискретного программирования и теории графов.

Ключевые слова: оптимальное целераспределение, булевы переменные, независимое множество вершин, наибольшая клика графа, гамильтонов цикл, жадный алгоритм.

FORMATION OF APPLIED MATHEMATICAL CULTURE IN THE PROCESS OF DIRECTING THE MILITARY-SCIENTIFIC WORK OF CADETS IN A MILITARY UNIVERSITY

V.I. SYSOEVA, Candidate of Pedagogical sciences, Associate Professor
MESC AF «N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy» (Voronezh)
S.S. NOVIKOVA, Candidate of Pedagogical sciences, Associate Professor
MESC AF «N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy» (Voronezh)

The article deals with the formulation and mathematical models of some applied optimization problems, which were proposed by the authors as tasks for military University cadets in the process of managing their work in the military scientific society. As a result of their work, the cadets mastered and programmatically implemented a number of discrete programming algorithms and graph theory.

Keywords: optimal target distribution, Boolean variables, independent vertex set, largest clique of the graph, Hamiltonian cycle, greedy algorithm.

Введение. Приоритетные задачи современной военной педагогики связанны с разработкой и реализацией компетентностной модели обучения [1]. Одной из важнейших профессиональных компетенций будущих военных инженеров является владение навыками математического моделирования. Формированию этой компетенции у курсантов военного вуза, наряду с другими прогрессивными методами подготовки, способствует специально подобранная тематика их военно-научной работы.

Актуальность. При формировании решений военный специалист вынужден учитывать многочисленные соображения и опираться на сложные критерии эффективности путей достижения цели. В связи с этим среди военно-прикладных задач наиболее актуальными являются оптимизационные задачи.

Крайняя насыщенность и жёсткая регламентация учебных занятий по математике в военном вузе не позволяет в должной степени уделить внимание математическим моделям задач такого рода. Однако во время работы курсантов в кружках военно-научного общества такая возможность предоставляется. Мы предлагаем тематику военно-научной работы, нацеленную на формирование навыков математического моделирования профессионально значимых оптимизационных задач.

Ниже приводятся примеры заданий, которые в разные годы были апробированы авторами в процессе руководства военно-научной работой курсантов на факультетах, готовящих специалистов радиоэлектронной борьбы.

При выполнении задания работа курсанта содержала следующие этапы:

– ознакомление с постановкой задачи в общем виде;
– построение её математической модели;
– поиск и освоение алгоритма решения задачи;
– его программная реализация;
– подготовка сообщения на научной конференции;
– публикация статьи.

Перейдём к рассмотрению примеров.

Задача 1. Целераспределение неоднородных средств подавления.

Пусть требуется распределить n неоднородных средств подавления между m независимыми целями $(n > m)$, причем каждое средство может быть назначено на подавление только одной цели. Эффективности средств подавления заданы матрицей $A = \{a_{ij}\}$, где a_{ij} – вероятность подавления *j*-й цели *i*-м средством $i = 1, 2, ..., n;\ j = 1, 2, ..., m$. Заданы также весовые коэффициенты b_j важности *j*-й цели $(j = 1, 2, ..., m)$. Требуется найти такое целераспределение, которое максимизировало бы математическое ожидание числа подавленных целей с учетом коэффициентов их важности.

Построим математическую модель задачи.

Введем булевы переменные: $x_{ij} = 1$, если *i*-е средство назначается для подавления *j*-й цели, в противном случае $x_{ij} = 0$. Тогда:

$(1 - a_{ij})^{x_{ij}}$ есть вероятность неподавления *j*-й цели *i*-м средством,

$\prod_{i=1}^{n}(1 - a_{ij})^{x_{ij}}$ – вероятность неподавления *j*-й цели ни одним из назначенных средств подавления,

$1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - a_{ij})^{x_{ij}}$ – вероятность подавления *j*-й цели (хотя бы одним из назначенных средств подавления),

$\sum_{j=1}^{m} b_j \left[1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - a_{ij})^{x_{ij}}\right]$ – математическое ожидание числа подавленных целей с учетом их важности.

Таким образом, математическая модель задачи имеет вид:

$$F = \sum_{j=1}^{m} b_j \left[1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - a_{ij}\right)^{x_{ij}}\right] \to \max, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1,\ \ i = 1, 2, \ldots\ n, \tag{2}$$

$$x_{ij}^2 - x_{ij} = 1,\quad i = 1, 2, ..., n;\ \ j = 1, 2, ..., m. \tag{3}$$

Здесь ограничения (2) отражают тот факт, что каждое средство может быть назначено на подавление только одной цели, а ограничения (3) обеспечивают равенство каждой переменной x_{ij} или нулю, или единице.

Приведём ещё одну интерпретацию математической модели (1)–(3).

Производится поиск цели, которая с вероятностью b_j может находиться в одном из m районов $(j=1,2,...,m)$. Имеется n неоднородных средств обнаружения цели, эффективности которых заданы матрицей $A=\{a_{ij}\}$, где a_{ij} – условная вероятность обнаружения цели i-м средством в j-м районе при условии, что она находится в этом районе $(i=1,2,...,n;\ j=1,2,...,m)$. Пусть

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } i\text{-е средство направляется в } j\text{-й район,}\\ 0, & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

тогда целевая функция (1) представляет собой полную вероятность обнаружения цели. Требуется так распределить поисковые средства по районам, то есть найти такую матрицу назначений $X=\{x_{ij}\}$, чтобы эта вероятность была максимальной.

Задача (1)–(3) была решена нами так называемым методом двух функций, описанным в [2]. На каждом шаге этого метода распределяется ровно одно средство подавления. Вводятся в рассмотрение две функции: функция выигрыша (приращение целевой функции) и функция потерь, оценивающая ущерб от невозможности использовать выбранное на данном шаге средство подавления на последующих итерациях метода. Суть метода состоит в организации такого порядка целераспределения, при котором на каждом шаге гарантируется наибольший прирост функции выигрыша при возможно меньших потерях. Доказано, что метод обладает высокой точностью, причем она увеличивается с ростом размерности задачи. В [2] также приведена оценка точности этого метода, основанная на теоретико-вероятностном подходе.

Приведём алгоритм метода двух функций, обозначив для краткости $\varepsilon_{ij}=1-a_{ij}$.

1. Вычислить элементы текущей матрицы $\{\Delta_{kl}^{(t)}\}$ по формуле

$$\Delta_{kl}^{(t)}=b_l^{(t-1)}a_{kl}-\sum_{j\neq l}\frac{b_j^{(t-1)}a_{kj}}{\varepsilon_{kj}}c_j^{(t-1)},\quad k\in N^{(t)},\ l=1,2,...,m, \tag{4}$$

где

$$b_l^{(0)}=b_l,\ c_j^{(0)}=\prod_{i=1}^{n}\varepsilon_{ij},\ j=1,2,...,m;\ l=1,2,...,m; \tag{5}$$

$N^{(t)}$ – множество номеров средств, неиспользованных к t-му шагу процесса.

2. Закрепить k_t-е средство за l_t-й целью $\left(x_{k_t l_t}=1\right)$ согласно условию

$$\Delta_{k_t l_t}=\max_{k,i}\Delta_{kl},\ k\in N^{(t)},\ l=1,2,...,m. \tag{6}$$

3. Вычислить текущее значение функции F_t^+:

$$F_t^+=F_{t-1}^++\Delta_{k_t l_t},\ F_0^+=0. \tag{7}$$

СОДЕРЖАНИЕ

4. Вычислить новые значения величин $b_l^{(t)}$ и $c_j^{(t)}$:

$$b_l^{(t)} = \begin{cases} b_l^{(t-1)}, & \text{если} \quad l \neq l_t, \\ b_l^{(t-1)} \cdot \varepsilon_{k_t l}, & \text{если} \quad l = l_t, \end{cases} \tag{8}$$

$$c_j^{(t)} = \frac{c_j^{(t-1)}}{\varepsilon_{k_t l}}, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{9}$$

5. Проверить условие $t < n$:
если оно выполняется, то перейти к пункту 1, если нет – перейти к пункту 6.

6. Прекратить вычисления. Зафиксировать результат $F_t^+ = F_{\max}$, $X = \{x_{ij}\}$.

Алгоритм (4)–(9) реализован нами программно. В качестве контрольного примера для проверки корректности программы была рассмотрена задача (1)–(3) при исходных данных:

$$n = 6, \quad m = 4, \quad A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 & 0,5 \\ 1,0 & 0,2 & 0,8 & 1,0 \\ 0,8 & 0,1 & 0,6 & 1,0 \\ 1,0 & 0,6 & 0,0 & 1,0 \\ 0,5 & 0,0 & 0,4 & 0,7 \\ 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad \{b_j\} = \{10, 8, 6, 2\},$$

оптимальный план которой известен.

В результате вычислений получена следующая матрица назначений

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и соответствующее ей значение целевой функции $F_{\max} = 22,04$.

Таким образом, оптимальным является следующее целераспределение: на 1-ю цель следует назначить 2-е средство подавления, на 2-ю цель – 1-е и 4-е средства, на 3-ю цель – 3-е и 6-е, на 4-ю цель – 5-е средство.

Задача 2. О помехоустойчивом кодировании.

Происходит передача информации в следующих условиях. Источник информации посылает сообщения, являющиеся последовательностями сигналов из множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. В силу помех возможны искажения некоторых из них: принимающая сторона некоторый сигнал x_i может принять за другой x_j. Рассмотрим граф с множеством вершин $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Будем считать, что ребро $x_i x_j$ имеет место, если сигналы x_i и x_j могут быть при передаче информации принимающей стороной перепутаны. Тогда, чтобы получить

СОДЕРЖАНИЕ

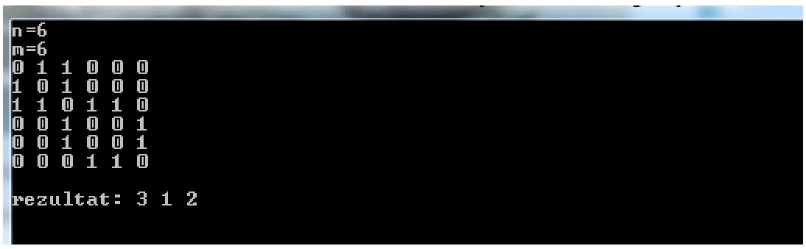
помехоустойчивый код (исключить перепутывания), следует пользоваться сигналами из независимого подмножества вершин графа, то есть множества таких вершин графа, что никакие две из них не соединены ребром. А поскольку мы заинтересованы в максимальном количестве таких сигналов, приходим к задаче отыскания *наибольшего независимого множества* вершин графа. Эта задача тесно связана с задачей о наибольшей *клике* графа (*кликой* называется подмножество вершин графа, любые две из которых соединены ребром). Известно, что подмножество вершин графа G является кликой тогда и только тогда, когда оно независимо в дополнительном графе $\overline{G}$ [3]. Напомним, что дополнительный граф к графу G это граф с теми же вершинами, что и граф G, но только с теми рёбрами, которые не входят в G. Т.е., всякая наибольшая клика в графе G – это наибольшее независимое множество в графе $\overline{G}$ и наоборот.

Задача 2 была решена нами сведением её к задаче о наибольшей клике [4]. Последняя также имеет обширные приложения (например, при автоматизации проектирования радиоэлектронной аппаратуры) и сама по себе заслуживает большого внимания. При этом в среде C++ нами был программно реализован один из известных алгоритмов приближённого решения задачи о нахождении наибольшей клики графа. Обращение к приближённым алгоритмам целесообразно в связи с тем, что реальные прикладные задачи, приводящие к поиску наибольшей клики, как правило, имеют большие размерности, в то время как пока не разработаны эффективные (имеющие полиномиальную оценку сложности) алгоритмы точного решения этой задачи [5].

Входными данными программы является матрица смежности графа. Выход программы – список вершин, образующих наибольшую клику. Корректность программы подтверждена следующим контрольным примером: $n = 6$, матрица смежности имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В результате получено точное решение: {3; 1; 2} – наибольшая клика графа. Программная реализация этого решения приведена на рисунке 1.



```
n=6
m=6
0 1 1 0 0 0
1 0 1 0 0 0
1 1 0 1 1 0
0 0 1 0 0 1
0 0 1 0 0 1
0 0 0 1 1 0

rezultat: 3 1 2
```

Рисунок 1 – Результат тестирования программы

Задача 3. Планирование производства.

На некотором комплексе промышленного оборудования производится n различных видов продукции, причём в любой момент времени производится только один из них. При переходе производства от одного вида продукции к другому комплекс останавливают для переналадки. Продукция производится циклически, то есть после производства в заданных количествах всех n видов продукции процесс повторяется. Требуется определить циклическую последовательность производства, минимизирующую суммарное время простоя оборудования.

В терминах теории графов эта задача может быть сформулирована следующим образом. Имеется полный рёберно взвешенный неориентированный граф. Требуется найти гамильтонов цикл с минимальной суммой весов составляющих его рёбер (кратчайший гамильтонов цикл). Напомним, что гамильтоновым циклом называется замкнутый маршрут, проходящий через все вершины графа один и только один раз.

Известно, что задача о нахождении кратчайшего гамильтонова цикла, как и предшествующая задача о наибольшей клике, относится к классу NP-трудных, то есть к настоящему времени не найдено полиномиальных алгоритмов, позволяющих получить точное её решение. Все известные точные алгоритмы решения рассматриваемой задачи имеют экспоненциальную сложность. Ведутся поиски более совершенных методов, и большое внимание уделяется приближённым алгоритмам полиномиальной трудоёмкости [5].

Простейшим примером такого алгоритма для нашей задачи является следующий жадный алгоритм (жадными называют алгоритмы, стратегия которых на каждом шаге предполагает выбор варианта, наилучшего в данный момент). *Поиск гамильтонова цикла начинаем с произвольно выбранной вершины графа, после чего на каждой итерации в путь включается ребро, ведущее в до сих пор не посещённую вершину и имеющее минимальный вес.* Трудоёмкость этого алгоритма составляет $O(n^3)$. Доказана его сходимость по вероятности к оптимальному решению с ростом числа вершин графа.

В рамках работы в военно-научном обществе ВУНЦ ВВС «ВВА» нами была разработана программа в среде C++, реализующая этот алгоритм. Корректность программы была проверена на графе с шестью вершинами, кратчайший гамильтонов цикл которого известен. Он имеет вид: 1-5-4-6-3-2-1. Соответствующее оптимальное значение целевой функции (суммарный вес рёбер) равно 49. Граф задаётся следующей матрицей расстояний

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 16 & 21 & 2 & 17 \\ 13 & \infty & 21 & 15 & 43 & 23 \\ 25 & 3 & \infty & 31 & 17 & 9 \\ 13 & 10 & 27 & \infty & 33 & 12 \\ 9 & 2 & 19 & 14 & \infty & 51 \\ 42 & 17 & 5 & 9 & 23 & \infty \end{pmatrix}.$$

Реализуя для этой задачи жадный алгоритм с помощью составленной нами программы, исходя из разных вершин графа, мы в трёх случаях из шести (а именно, выбирая в качестве стартовой 2-ю, 3-ю или 6-ю вершины) пришли к точному (оптимальному) решению, приведённому выше. Результат расчёта для случая, когда в качестве стартовой выбрана 2-я вершина графа, представлен на рисунке 2; для случая, когда в качестве стартовой выбрана 3-я вершина, представлен на рисунке 3; результат в случае, когда стартовой является 6-я вершина графа, представлен на рисунке 4.

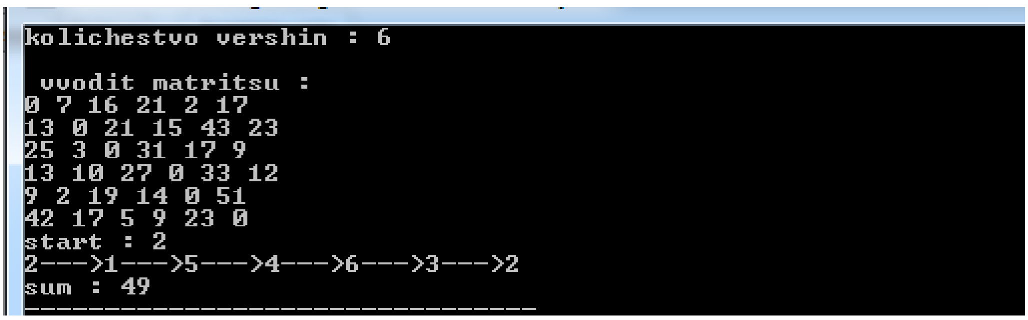


Рисунок 2 – Рабочее окно программы, когда в качестве стартовой выбрана 2-я вершина

СОДЕРЖАНИЕ

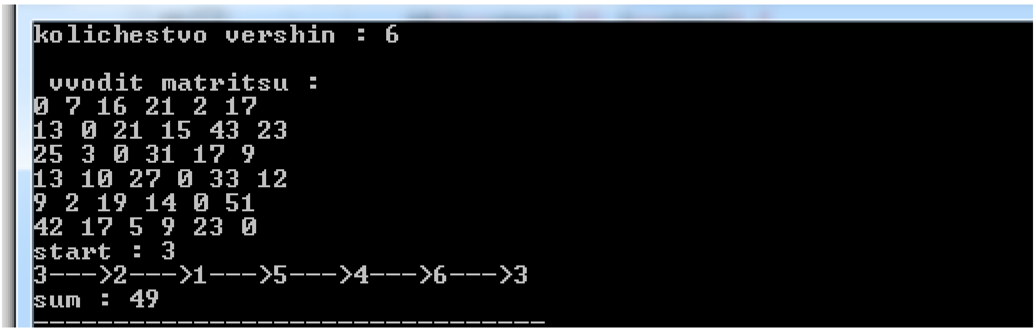


Рисунок 3 – Рабочее окно программы, когда в качестве стартовой выбрана 3-я вершина

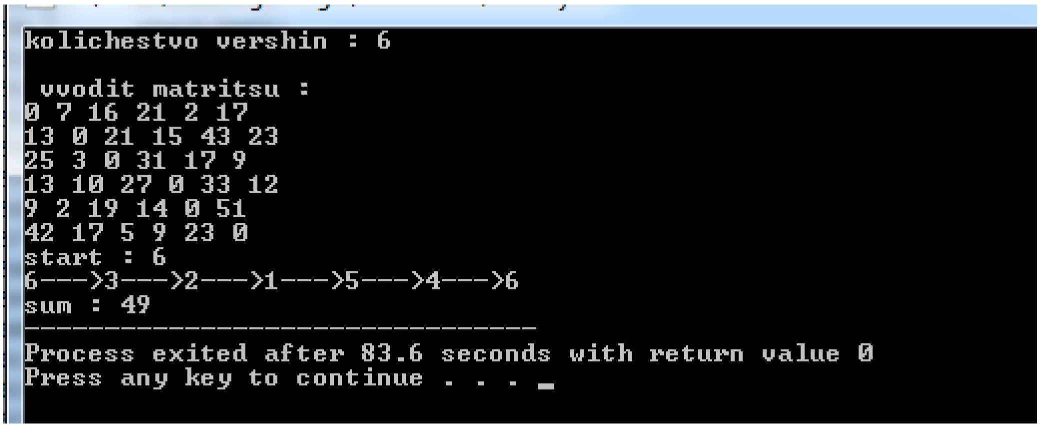


Рисунок 4 – Рабочее окно программы, когда в качестве стартовой выбрана 6-я вершина

Положительный результат этого небольшого вычислительного эксперимента позволяет рекомендовать рассмотренный алгоритм к практическому применению для графов большой размерности.

Выводы. Задачи, подобные рассмотренным выше, вызывают большой интерес у курсантов – будущих адъюнктов и военных специалистов. Они способствуют мотивации обучения и формированию профессиональных компетенций у обучающихся.

Организованная предлагаемым образом военно-научная работа расширяет математические знания курсантов, развивает навыки математического моделирования и формирует их прикладную математическую культуру.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузьмина Л.Г. Компетентностный подход в высшем профессиональном образовании: современное состояние и перспективы развития // Вестн. Воронеж. гос. техн. ун-та. 2013. Т. 9. № 5–2. С. 30–33.

2. Берзин Е.А. Оптимальное распределение ресурсов и элементы синтеза систем / Е.А. Берзин. М.: Сов. радио, 1974. 247 с.

3. Емеличев В.А., Мельников О.И. и др. Лекции по теории графов / В.А. Емеличев, О.И. Мельников. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1990. 384 с.

4. Сысоева В.И., Нгием Ван Донг, Фан Ван Тунг. Приближённое решение задачи о наибольшей клике графа // Материалы II Международной научно-практической конференции «Молодёжный форум: Прикладная математика. Математическое моделирование систем и механизмов». Воронеж: ВГЛТУ, 2019. № 1 (44). С. 436–439.

5. Кононов А.В., Кононов П.А. Приближённые алгоритмы для NP-трудных задач. / А.В. Кононов, П.А. Кононов. Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск: РИЦ НГУ, 2014. 117 с.

REFERENCES

1. Kuz'mina L.G. Kompetentnostnyj podhod v vysshem professional'nom obrazovanii: sovremennoe sostoyanie i perspektivy razvitiya // Vestn. Voronezh. gos. tehn. un-ta. 2013. T. 9. № 5–2. pp. 30–33.
2. Berzin E.A. Optimal'noe raspredelenie resursov i `elementy sinteza sistem / E.A. Berzin. M.: Sov. radio, 1974. 247 p.
3. Emelichev V.A., Mel'nikov O.I. i dr. Lekcii po teorii grafov / V.A. Emelichev, O.I. Mel'nikov. M.: Nauka. Gl. red. fiz-mat. lit., 1990. 384 p.
4. Sysoeva V.I., Ngiem Van Dong, Fan Van Tung. Priblizhennoe reshenie zadachi o naibol'shej klike grafa // Materialy II Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii «Molodezhnyj forum: Prikladnaya matematika. Matematicheskoe modelirovanie sistem i mehanizmov». Voronezh: VGLTU, 2019. № 1 (44). pp. 436–439.
5. Kononov A.V., Kononov P.A. Priblizhennye algoritmy dlya NP-trudnyh zadach. / A.V. Kononov, P.A. Kononov. Novosib. gos. un-t. Novosibirsk: RIC NGU, 2014. 117 p.

Сысоева Валентина Ивановна, кандидат педагогических наук, доцент, старший преподаватель 206 кафедры математики, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А, sysoeva_vi@mail.ru.

Новикова Светлана Сергеевна, кандидат педагогических наук, доцент, доцент 206 кафедры математики, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А, sv281174@rambler.ru.