УДК 517.929.4
ГРНТИ 27.31.17

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ ЛИНЕЙНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫМИ СИСТЕМАМИ С ЛИНЕЙНО ВОЗРАСТАЮЩИМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А.П. ЖАБКО, доктор физико-математических наук, профессор
Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург)
А.М. КАМАЧКИН, доктор физико-математических наук, профессор
Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург)

Рассматриваются линейные дифференциально-разностные системы уравнений с линейно-возрастающим запаздыванием. Основным результатом являются коэффициентные достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости. Подробно разбирается вывод уравнений математической модели динамики движения автоколонны при совершении марша. Рассматриваемые уравнения хорошо описывают возникновение нештатных остановок автоколонны на маршевых участках в условиях горной местности.

Ключевые слова: дифференциально-разностные уравнения, системы с запаздыванием, асимптотическая устойчивость, устойчивость по Ляпунову, метод функционалов Ляпунова-Красовского.

DYNAMIC PROCESSES STABILITY ANALYSIS DESCRIBED BY LINEAR DIFFERENTIAL-DIFFERENCE SYSTEMS WITH LINEARLY INCREASING DELAY

A.P. ZHABKO, Doctor of Physico-Mathematical sciences, Professor
Saint Petersburg state University (Saint Petersburg)
A.M. KAMACHKIN, Doctor of Physico-Mathematical sciences, Professor
Saint Petersburg state University (Saint Petersburg)

Linear differential-difference systems of equations with linear-increasing delay are considered. The main result is coefficient sufficient conditions for asymptotic stability and instability. The conclusion of the equations of the mathematical model of the movement dynamics of the convoy during the march is analyzed in detail. The equations under consideration describe well the occurrence of emergency stops of the convoy on marching sections in mountainous terrain.

Keywords: differential-difference equations, systems with delay, asymptotic stability, Lyapunov stability, Lyapunov-Krasovsky functionals method.

Введение. Дифференциально-разностные системы часто используются в математических моделях для описания реальных явлений. Методы анализа систем с ограниченным и неограниченным запаздыванием существенно различаются. Например, неограниченно возрастающее технологическое запаздывание в химических процессах появляется при моделировании динамики перемешивания. При моделировании динамических процессов в информационном сервере [1] следует учитывать время необходимое для обработки информации. В динамической модели трафика на непрямолинейном участке маршрута возрастающее запаздывание появляется при описании нештатных остановок.

Актуальность. В последнее десятилетие прошлого века актуализировалась проблема описания различного рода процессов математическими формализмами, базирующимися на

СОДЕРЖАНИЕ

дифференциально-разностных системах или их аналогах. Причиной тому явилась алгоритмизация таких процессов и последующая числовая обработка полученных данных. При этом существенную роль играют запаздывания (ограниченные или неограниченные), присущие подавляющему числу естественнонаучных процессов. Методы анализа с ограниченным и неограниченным запаздыванием существенно различаются. Например, неограниченно возрастающее технологическое запаздывание в химических процессах проявляется при моделировании динамики перемешивания. При моделировании динамических процессов в информационном сервере следует учитывать время необходимое для обработки информации, а значит, временное запаздывание. В динамической модели трафика на прямолинейном участке маршрута возрастающее запаздывание появляется при описании нештатных остановок. В работе рассматриваются линейные дифференциально-разностные системы уравнений с линейно-возрастающим запаздыванием. Основным результатом являются коэффициентные достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости. В дальнейшем предполагается распространить метод функционалов Ляпунова-Красовского, обоснованный для систем с ограниченным запаздыванием, на рассмотренные системы и получить необходимые и достаточные условия устойчивости таких систем в терминах прямого метода Ляпунова.

Моделирование динамики движения автоколонны при совершении марша в горных условиях. Рассмотрим непрямолинейный маршрут (НПМ), разделенный на участки. Перенумеруем эти участки от 1 до N, поэтому первый и N-ый участки будут соседними.

Пусть $x_i(t)$ и $V_i\left(x_i(t)\right)$ означают среднюю плотность и среднюю скорость движения автоколонны на участке с номером i в момент t. Пусть $r_i(t)$ обозначает среднюю плотность автоколонны на въезде в начале i-го участка, а $d_i(t)$ обозначает среднюю плотность на съезде в конце ($i-1$)-го участка.

Предположение 1. Предположим, что V_0 - максимальная допустимая скорость на НПМ.

Введем функцию:

$$V_i = V\left(x_i\right) = \begin{cases} V_0 \ , \ \textit{если} \ x_i \le x_0 \\ V\left(x_i\right) \ , \ \textit{если} \ x_i > x_0 \end{cases}. \tag{1}$$

Здесь функция $V\left(x\right)$ строго монотонно убывающая. Обозначим через l_i длину i-го участка. Пусть функции $x_i(t)$, $V_i(t)$, $r_i(t)$, $d_i(t)$, непрерывно дифференцируемы. Тогда можно выписать следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$l_i \cdot \dot{x}_i\left(t\right) = \begin{cases} -x_i\left(t\right)\cdot V_i\left(x_i\left(t\right)\right) + x_{i-1}\left(t\right)\cdot V_{i-1}\left(x_{i-1}\left(t\right)\right) \\ -d_i\left(t\right)\cdot V_{i-1}\left(x_{i-1}\left(t\right)\right) + r_i\left(t\right)\cdot V_i\left(x_i\left(t\right)\right) \ , \\ i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \tag{2}$$

где $x_0(t) \equiv x_N(t)$ и $V_0(t) \equiv V_N(t)$.

Постановка задачи. Пусть имеется возможность управлять плотностью автоколонны на въезде на НПМ, а именно, введем управление $u(t) = (r_1(t), r_2(t), ..., r_N(t))$ и ограничение $r_i\left(t\right) \ge 0 \ \ \textit{при}\, i = 1, 2, \dots, N$.

Рассмотрим функционал $J\left(u\left(\cdot\right)\right) = \min_{i=1,2,\dots,N} \min_{t\in[0,T]} V\left(x_i(t)\right)$.

Задача 1. В классе допустимых управлений найти оптимальное управление $u_{опт}\left(t\right)$, $t \in [0, T]$ такое, что $J\left(u_{опт}\left(\cdot\right)\right) = \max_u J(u(\cdot))$.

СОДЕРЖАНИЕ

Задача 2. Для заданного значения V_{zad} описать все множество допустимых управлений $u(t)$, $t \in [0,T]$, для которых выполняется неравенство $J(u(\cdot)) \geq V_{zad}$.

Решение данной задачи будем искать в классе функций:

$$r_i(t) = \sum_{s=0}^{N-1} \infty_{is} \cdot x_{i+s}(t - h_{is}), \quad i = 1,2,\ldots,N, \tag{3}$$

где $0 = h_{i0}(t) < h_{i1}(t) < \cdots < h_{i(N-1)}(t)$. В равенстве (3) полагаем $x_{i+s}(t - h_{is}) = x_{i+s-N}(t - h_{is})$, если $i + s > N$.

Основные результаты. Пусть функция $V(x)$ определена при $x > x_0 > x_0$ равенством $V(x) = \dfrac{V_0 \cdot x_0}{x_0 + a(x - x_0)}$, и $\dot{\overline{x}}_{is}$ есть средняя скорость увеличения плотности автоколонны между участком с номером s и участком с номером i в момент времени $\bar{t}$. Если $x_i(\bar{t}) = x_{0i}$, то запаздывание h_{is} в линейном приближении можно определить равенством:

$$h_{is} = \overline{l_{is}} \frac{x_{0i} + a \cdot \overline{x_{is}}(t - \bar{t})}{V_0 \cdot x_0} = h_{is}^0 + \gamma_{is}(t - \bar{t}), \tag{4}$$

в котором $\overline{l_{is}} = \sum_{j=s+1}^{i-1} l_j$ и l_j – длина j-го участка.

Заметим, что, исходя из физической постановки задачи, при моделировании процесса возникновения нештатной остановки можно считать выполненными ограничения:

$$0 < h_{is}^0 \leq H < \infty,\ 0 < \gamma_{is} < 1,\ i = 1,2,\ldots,N,\ s = 1,\ldots,N-1, \tag{5}$$

причем, $h_{i0}^0 = \gamma_{i0} = 0,\ i = 1,2,\ldots,N$.

В системе (2), вообще говоря, существуют положения равновесия:

$$x_i(t) \equiv \overline{x_i} > x_0,\ V_i(t) \equiv \overline{V_i},\ r_i(t) \equiv d_i(t) \equiv \overline{d_i} > 0,\ \dot{\overline{x_{is}}}(t) \equiv 0,\ i,s = 1,2,\ldots,N. \tag{6}$$

Выпишем систему линейного приближения в окрестности решения (6). Если ввести новые переменные, то система линейного приближения для системы (2), (3), (4) в окрестности равновесия (6) есть:

$$\dot{y}_i(t) = \frac{\overline{V}}{l_i}\left[\left(l_i - c_i \overline{x_i} + c_i \overline{d_i}\right)\left(y_{i-1}(t) - y_i(t)\right) + z_i(t)\right],\ i = 1,2,\ldots,N, \tag{7}$$

где $c_i = \dfrac{a}{x_0 + a(\overline{x_i} - x_0)}$ и $z_i(t) = \sum_{s=0}^{N-1} \alpha_{is} \cdot y_{i+s}(t - h_{is}^0 - \gamma_{is} \cdot t)$.

Предположение 2. Будем считать, что числа h_{is}^0 и γ_{is} удовлетворяют условию (5). Предположим также, что существуют величины $0 < h < \infty$, $0 < \gamma < 1$ и целые неотрицательные n_{is} и m_{is}, связанные равенствами $h_{is}^0 = n_{is} \cdot h$ и $\ln(1 - \gamma_{is}) = m_{is} \cdot \ln(\gamma)$ при $i = 1,2,\ldots,N,\ s = 1,\ldots,N-1$.

Тогда систему (7) можно записать в виде системы линейных дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа:

$$\frac{dY(t)}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=0}^{N-1}A_{is}\cdot Y(t\cdot\gamma^{m_{is}}-n_{is}\cdot h), \tag{8}$$

где A_{is} – постоянные матрицы.

Для того, чтобы найденные решения задач 1 и 2 могли быть реализованы, необходимо обеспечить асимптотическую устойчивость системы (8). Следующие теоремы могут быть применены при построении стабилизирующего управления.

Случай 1. Отсутствуют линейно возрастающие запаздывания и, следовательно, система (8) принимает вид:

$$\frac{dY(t)}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=0}^{N-1}A_{is}\cdot Y(t-n_{is}\cdot h). \tag{9}$$

Теорема 1 [2]. Система (9) является экспоненциально устойчивой тогда и только тогда, когда характеристический квазиполином системы (9) $f(\mu)=\det[\mu E-\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=0}^{N-1}A_{is}\cdot\exp(-\mu\cdot n_{is}\cdot h)]$ является гурвицевым.

Случай 2. Отсутствуют постоянные запаздывания и, следовательно, система (8) принимает вид:

$$\frac{dY(t)}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=0}^{N-1}A_{is}\cdot Y(t\cdot\gamma^{m_{is}}). \tag{10}$$

Теорема 2 [3]. Система (10) является асимптотически устойчивой тогда и только тогда, когда системы $\frac{dY(t)}{dt}=\sum_{i=1}^{N}A_{i0}\cdot Y(t)$ и $\left(\sum_{i=1}^{N}A_{i0}\right)\cdot Z(\tau)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{N-1}A_{is}\cdot Z(\tau-m_{is}\cdot\ln\gamma)$ также асимптотически устойчивы.

В общем случае будет справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Система (8) является асимптотически устойчивой тогда и только тогда, когда системы $\frac{dY(t)}{dt}=\sum_{i=1}^{N}A_{i0}\cdot Y(t-n_{i0}\cdot h)$ и $\sum_{i=1}^{N}A_{i0}\cdot Z(\tau-n_{i0}\cdot h)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{N-1}A_{is}\cdot Z\left(t\cdot\gamma^{m_{is}}-n_{is}\cdot h\right)$ также асимптотически устойчивы.

Проведем доказательство в несколько этапов. Сначала изучим простейший случай уравнения, содержащего одно постоянное запаздывание и одно линейно возрастающее запаздывание. А именно, рассмотрим уравнение:

$$\frac{dy(t)}{dt}=a\cdot y(t)+b\cdot y(t-h)+c\cdot y(\alpha\cdot t),\ t\ge t_0>0, \tag{11}$$

в котором a,b,c,α – вещественные числа, причем $0<б<1$. В качестве начальной функции выбираем непрерывную функцию $\varphi(\tau)$, заданную на промежутке $\tau\in[t_0-H,t_0]$ при $H=\max\{h;(1-\alpha)\cdot t_0\}$.

Заметим, что при $(1-\alpha)t_0 \geq h$ выполняется неравенство $(1-\alpha)t \geq (1-\alpha)t_0 \geq h$, поэтому $H=(1-б)t_0$.

Лемма 1. При $t \geq \alpha^{1-k} \cdot t_0$ $(k=1,2,\ldots)$ решение $y(t)$ уравнения (11) имеет k непрерывных производных и удовлетворяет равенству:

$$y^{(k)}(t)=a\cdot y^{(k-1)}(t)+b\cdot y^{(k-1)}(t-h)+\alpha^{k-1}\cdot c\cdot y^{(k-1)}(\alpha\cdot t),\ t\geq\alpha^{1-k}\cdot t_0>0. \quad (12)$$

Доказательство. Гладкость решения доказана в монографии [2], а справедливость равенства (12) проверяется непосредственным дифференцированием тождества (11).

Предположим, что вспомогательное уравнение:

$$\frac{dz(t)}{dt}=a\cdot z(t)+b\cdot z(t-h), \quad (13)$$

экспоненциально устойчиво по Ляпунову. Тогда существует [2] такой положительно определенный квадратичный функционал $v_0(z_t)=u(0)\cdot z^2(t)+2b\cdot z(t)\cdot\int\limits_{-h}^{0}u(h+\tau)\cdot z(t+\tau)d\tau+$ $+d\cdot\int\limits_{-h}^{0}(h+\tau)\cdot z^2(t+\tau)d\tau+b^2\cdot\iint\limits_{-h}^{0}u(\tau_1-\tau_2)\cdot z(t+\tau_1)\cdot z(T+\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$, что вдоль решений уравнения (13) при $t\geq t_0$ выполняется равенство $\frac{dv_0(z_t)}{dt}=-2\cdot z^2(t)-d\cdot\int\limits_{-h}^{0}z^2(t+\tau)d\tau$.

В этих равенствах непрерывно дифференцируемая при $\tau\neq 0$ функция $u(\tau)$ определяется известным образом [2].

Лемма 2. Если уравнение (13) экспоненциально устойчиво и натуральное число k удовлетворяет неравенству $\alpha^{k-1}\cdot|c|\cdot|u(0)|<1$ и неравенству $\alpha^{k-2}\cdot|c|\cdot|u(0)|+$ $+\alpha^{k-2}\cdot h\cdot|b\cdot c|\cdot\max\limits_{0\leq\tau\leq h}|u(\tau)|<1$, то нулевое решение уравнения:

$$\dot z(t)=a\cdot z(t)+b\cdot z(t-h)+\alpha^{k-1}\cdot c\cdot z(\alpha\cdot t),\ t\geq t_0>0, \quad (14)$$

будет асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Найдем производную функционала $v(z_t)=v_0(z_t)+\int\limits_{\alpha t}^{t}z^2(\tau)d\tau$ вдоль решений уравнения (14), получим $\frac{dv(z_t)}{dt}=-2\cdot z^2(t)-d\cdot\int\limits_{-h}^{0}z^2(t+\tau)d\tau+z^2(t)-\alpha\cdot z^2(\alpha t)+$ $+2\left[b\cdot\int\limits_{-h}^{0}u(h+\tau)\cdot z(t+\tau)d\tau+u(0)\cdot z(t)\right]\cdot\alpha^{k-1}\cdot c\cdot z(\alpha t)$. Применяя неравенство $2\cdot u(h+\tau)\times$ $\times z(t+\tau)\cdot z(\alpha t)\leq z^2(t+\tau)+\max\limits_{0\leq\tau\leq h}|u(\tau)|\cdot z^2(\alpha t)$ и неравенство $2\cdot z(t)\cdot z(\alpha t)\leq z^2(t)+z^2(\alpha t)$ можно получить оценку производной функционала $v(z_t)$ в силу уравнения (14) $\frac{dv(z_t)}{dt}\leq-\left(1-\alpha^{k-1}\cdot c\cdot|u(0)|\right)\cdot z^2(t)-\left(d-\alpha^{k-1}\cdot b\cdot c\cdot\max\limits_{0\leq\tau\leq h}|u(\tau)|\right)\cdot\int\limits_{-h}^{0}z^2(t+\tau)d\tau-(\alpha-\alpha^{k-1}\cdot c\cdot|u(0)|-$ $-\alpha^{k-1}\cdot b\cdot c\cdot h\cdot\max\limits_{0\leq\tau\leq h}|u(\tau)|)\cdot z^2(\alpha t)$.

СОДЕРЖАНИЕ

Нетрудно проверить, что, если натуральное число k удовлетворяет условиям леммы 2, а число d – неравенству $d > \alpha^{k-1} \cdot |b \cdot c| \cdot \max\limits_{0\le\tau\le h} |u(\tau)|$, то производная функционала $v(z_t)$ в силу уравнения (14) будет отрицательно определенным функционалом. То есть, выполнены условия теоремы об асимптотической устойчивости уравнения (14).

Лемма 3. Пусть уравнение (13) экспоненциально устойчиво по Ляпунову. Тогда разностное уравнение:

$$a \cdot z(t) + b \cdot z(t-h) + \alpha^m \cdot c \cdot z(\alpha \cdot t) = 0,\ t \ge t_0 > 0, \tag{15}$$

асимптотически устойчиво по Ляпунову при $m = 0,1, \ldots$ тогда и только тогда, когда:

$$a + b < 0 \le -a\ ,\ |c| < |a+b|, \tag{16}$$

уравнение (11) является асимптотически устойчивым.

Доказательство. Так как уравнение (13) экспоненциально устойчиво, то $a + b < 0$.

Если $0 \le a < -b$, то дифференцируя функционал $v(z_t) = \int\limits_{-h}^{0} z^2(t+\tau)\,d\tau$ в силу уравнения (15) получаем:

$$\begin{aligned}\frac{dv(z_t)}{dt} &= \left(-\frac{b}{a} z(t-h) - \frac{\alpha^{m-1} \cdot c}{a} z(\alpha t)\right)^2 - z^2(t-h) = \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) \cdot z^2(t-h) + \left(\frac{\alpha^{m-1} \cdot c}{a}\right)^2 \cdot z^2(\alpha t) + \\ &+ 2 \cdot \frac{b \cdot \alpha^{m-1} \cdot c}{a} z(t-h) \cdot z(\alpha t) \ge \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 - \sigma^2\right) \cdot z^2(t-h) + \left(\frac{\alpha^{m-1} \cdot c}{a}\right)^2 (1 - \frac{b^2}{y^2}) \cdot z^2(бt).\end{aligned} \tag{17}$$

Далее покажем, что в случае $0 \le a < -b$ уравнение (15) неустойчиво. Действительно, возьмем число $e = 1$ и $0 < y^2 < \frac{b^2}{a^2} - 1$. Если в качестве начальной функции выбрать функцию $ц(t) = 0$ при $t < t_0 - h$, $ц(t) = z_0 \ne 0$, при $t \in [t_0 - h, t_0]$, то в некоторый момент $\bar{t} > t_0$ и достаточно большом t_0 будет выполнено равенство $z^2(\bar{t}) = 1$, что доказывает неустойчивость в этом случае.

Таким образом, мы доказали необходимость условия $a + b < 0 \le -a$. Необходимость и достаточность условия $|c| < |a+b|$ следует из работы [7].

Лемма доказана.

Теорема 4. Если уравнение (13) экспоненциально устойчиво и коэффициенты уравнения (11) подчинены условиям (16), то уравнение:

$$\dot{y}(t) = a \cdot y(t) + b \cdot y(t-h) + c \cdot y(\alpha \cdot t),\ t \ge t_0 > 0, \tag{18}$$

будет асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Из условия теоремы на коэффициенты уравнения следует, что уравнения $a \cdot z(t) + b \cdot z(t-h) + \alpha^{m-1} \cdot c \cdot z(\alpha \cdot t) = 0$ удовлетворяют условиям леммы 3 при $m = 0,1,\ldots,k-1$, поэтому эти уравнения асимптотически устойчивы. Определим функции $z_m(t) = y^m(t)$ при $m = 1,\ldots,k$. Рассмотрим равенства (12), как уравнения:

СОДЕРЖАНИЕ

$$a \cdot y^{(m)}(t) + b \cdot y^{(m)}(t-h) + \alpha^m \cdot c \cdot y^{(m)}(\alpha \cdot t) = z_{m+1}(t), \ t \geq \alpha^{-m} \cdot t_0 > 0, \tag{19}$$

при $m = 0, 1, \ldots, k-1$. По лемме 2 имеем, что $z_{m+1}(t) \to 0$ при $t \to \infty$, при $m = k-1$. Поэтому, используя лемму 3 получаем предельное соотношение $y^{(m)}(t) = z_m(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Повторяя эти рассуждения последовательно при $m = k-2, \ldots, 0$ завершаем доказательство.

Замечание 1. Доказательство теоремы 3 проводится аналогичным образом.

Замечание 2. В работах [4, 5] предложены конструктивные алгоритмы проверки условий теоремы 1 и теоремы 2.

Замечание 3. В работе [1, 6] сформулированы достаточные условия асимптотической устойчивости некоторых классов нелинейных систем дифференциально-разностных уравнений вида (7).

Выводы. В данной работе получены достаточные условия для управления движением автоколонны при совершении марша в условиях горной местности с исключением нештатных остановок, основанные на подходе Б.С. Разумихина, асимптотической устойчивости линейных дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим и постоянным запаздываниями. В дальнейшем предполагается распространить метод функционалов Ляпунова-Красовского, обоснованный для систем с ограниченным запаздыванием, на рассмотренные в статье системы, и получить необходимые и достаточные условия устойчивости таких систем в терминах прямого метода Ляпунова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жабко А.П., Чижова О.Н. Анализ устойчивости однородного дифференциально-разностного уравнения с линейным запаздыванием // Вестник СПбГУ. 2015. Серия 10. Вып. 3. С. 105–115.

2. Kharitonov V.L. Time-Delay Systems – Lyapunov Functionals and Matricies // Springer, 2012. 311 P.

3. Zhabko A., Chizhova O., Zaranik U. Stability Analysis of the Linear Time Delay Systems with Linearly Increasing Delay // Cybernetics and Physics. 2016. vol. 5. no. 2. P. 67–72.

4. Kharitonov V.L., Zhabko A.P. Lyapunov-Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay system // IEEE Trans. Automatica. 2003. Vol.39. P. 15–20.

5. Жабко А.П., Медведева И.В. Алгебраический подход к анализу устойчивости дифференциально-разностных систем // Вестник СПбГУ. 2011. Серия 10. Вып. 1. С. 9–20.

6. Александров А.Ю., Жабко А.П. Об устойчивости решений одного класса нелинейных систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2006. № 9. С. 3–14.

7. Александров А.Ю., Жабко А.П. Устойчивость разностных систем // Учебное пособие, СПб: НИИ Химии СПбГУ, 2003. 112 с.

REFERENCES

1. Zhabko A.P., Chizhova O.N. Analiz ustojchivosti odnorodnogo differencial'no-raznostnogo uravneniya s linejnym zapazdyvaniem // Vestnik SPbGU. 2015. Seriya 10. Vyp. 3. pp. 105–115.

2. Kharitonov V.L. Time-Delay Systems - Lyapunov Functionals and Matricies // Springer, 2012. 311 p.

3. Zhabko A., Chizhova O., Zaranik U. Stability Analysis of the Linear Time Delay Systems with Linearly Increasing Delay // Cybernetics and Physics. 2016. vol. 5. no. 2. pp. 67–72.

4. Kharitonov V.L., Zhabko A.P. Lyapunov-Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay system // IEEE Trans. Automatica. 2003. Vol.39. pp. 15–20.

5. Zhabko A.P., Medvedeva I.V. Algebraicheskij podhod k analizu ustojchivosti differencial'no-raznostnyh sistem // Vestnik SPbGU. 2011. Seriya 10. Vyp. 1. pp. 9–20.

6. Aleksandrov A.Yu., Zhabko A.P. Ob ustojchivosti reshenij odnogo klassa nelinejnyh sistem s zapazdyvaniem // Avtomatika i telemehanika. 2006. № 9. pp. 3–14.

7. Aleksandrov A.Yu., Zhabko A.P. Ustojchivost' raznostnyh sistem // Uchebnoe posobie, SPb: NII Himii SPbGU, 2003. 112 p.

Жабко Алексей Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории управления, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, г. Санкт-Петербург, Университетская набережная, 7-9, zhabko.apmath.spbu@mail.ru.

Камачкин Александр Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, г. Санкт-Петербург, Университетская набережная, 7-9, a.kamachkin@spbu.ru.