



УДК 539.37  
ГРНТИ 30.19.55

## ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНОГО УПРУГОГО ПОРОДНОГО МАССИВА ОСЛАБЛЕННОГО СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

*Д.В. ГОЦЕВ, доктор физико-математических наук, доцент  
ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)  
А.В. КОВАЛЕВ, доктор физико-математических наук, доцент  
ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)  
А.Н. ВНУКОВ, кандидат технических наук  
ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)*

В статье построена математическая модель и найдены аналитические решения, описывающие симметричное напряженно-деформированное состояние упругого породного массива в окрестности сферической полости с учетом технологической неоднородности пород приконтурной области. Технологическая неоднородность упругих свойств грунта смоделирована радиально неоднородным модулем упругости при постоянном коэффициенте Пуассона. Функциональная зависимость модуля упругости для неоднородного грунта аппроксимировалась обобщенным полиномом радиальной координаты с неопределенными коэффициентами. На основе экспериментальных данных проведен численный расчет компонент напряженно-деформированного состояния для рассматриваемой задачи, выявлены характерные эффекты. Построенная математическая модель имеет особое значение для Вооруженных Сил РФ при строительстве взлетно-посадочных полос с искусственным покрытием.

*Ключевые слова:* неоднородные упругие материалы, напряженно-деформированное состояние, породный массив со сферической полостью, приконтурная область массива, коэффициент Пуассона.

## NUMERICAL-ANALYTICAL STUDY OF THE STRESSED-DEFORMED STATE OF AN INHOMOGENEOUS ELASTIC BREED MASSIV WEAKENED BY A SPHERICAL CAVITY

*D.V. GOTSEV, Doctor of physico-mathematical sciences, Assistant Professor  
MESC AF «N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy» (Voronezh)  
A.V. KOVALEV, Doctor of physico-mathematical sciences, Assistant Professor  
MESC AF «N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy» (Voronezh)  
A.N. VNUKOV, Candidate of technical sciences  
MESC AF «N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy» (Voronezh)*

The article presents a mathematical model and analytical solutions describing the symmetric stress-strain state of an elastic rock mass in the vicinity of a spherical cavity, taking into account the technological heterogeneity of rocks in the contour area. Technological inhomogeneity of soil elastic properties is modeled by radially inhomogeneous modulus of elasticity at constant Poisson's ratio. The functional dependence of the elastic modulus for inhomogeneous soil was approximated by a generalized polynomial of the radial coordinate with uncertain coefficients. On the basis of experimental data, the numerical calculation of the stress-strain state components for the considered problem is carried out, the



characteristic effects are revealed. The constructed mathematical model is of particular importance for the Armed Forces of the Russian Federation in the construction of runways with artificial turf.

*Keywords:* heterogeneous elastic materials, stress-strain state, rock mass with a spherical cavity, marginal region of the mass, Poisson's ratio.

**Введение.** Одной из основных задач механики грунтов и горных пород является научное обоснование процессов и явлений, происходящих в породном массиве, вблизи незакрепленных подземных сооружений [1]. Выбор способа искусственного упрочнения грунтов в приконтурных областях и расчет несущей способности ограждающих упрочненных породных массивов обеспечивает безопасность строительных работ и нормальное эксплуатационное состояние подземных конструкций. В качестве примера наиболее сложных инженерных задач по расчету упрочненных породных массивов можно привести расчет подземных полостей, сооружаемых взрывом камуфлетных зарядов [2–9]. Данный расчет необходим при возведении дорожных покрытий внутриаэродромных дорог.

**Актуальность.** Исследование механических процессов, протекающих в грунте, может быть выполнено с помощью экспериментов (как лабораторных, так и натуральных) и аналитическими методами. Отметим, что информация, получаемая в результате натуральных исследований, хотя и является весьма ценной для понимания механических процессов в породных массивах, имеет региональный характер, то есть отражает специфику горнотехнических условий эксперимента. Аналитические же методы обладают наибольшей универсальностью при моделировании механических процессов и свободны от влияния частных факторов. Кроме этого аналитические методы позволяют исследовать механические процессы в более широком диапазоне, то есть позволяют прогнозировать не только качественную картину, но и давать количественную оценку влияния различных факторов.

Естественная неоднородность наблюдается практически во всех грунтах и породных массивах. Изучение естественной неоднородности, характеризуемой различием деформационных свойств грунта в различных его точках, сопряжено со значительными техническими трудностями по отбору образцов породы во многих точках грунта. В настоящее время такие экспериментальные данные ограничены. Данное исследование имеет важное значение для строительства взлетно-посадочных полос с искусственным покрытием на аэродромах государственной авиации. Искусственная неоднородность появляется в процессе технологического воздействия на породный массив при сооружении горных выработок, в частности при буровзрывной выемке породы в горных выработках [3, 10]. Первоначально однородно-изотропный массив в результате производства буровзрывных работ приобретает технологическую неоднородность деформационных характеристик.

Изучение напряженно-деформированного состояния неоднородных сред будем осуществлять с позиций классической линейной теории упругости неоднородного тела. При этом имеют место следующие основные уравнения механики сплошной среды:

– уравнения равновесия:

$$\nabla_i \sigma_j^i + \rho(x^s) F_i = 0; \tag{1}$$

– соотношения Коши:

$$2\varepsilon_j^i = \nabla_j u^i + \nabla^i u_j; \tag{2}$$

– закон Гука:

$$\sigma_j^i = \lambda(x^s) \varepsilon_\alpha^\alpha g_j^i + 2\mu(x^s) \varepsilon_j^i. \tag{3}$$



Здесь и далее приняты следующие обозначения  $x^s (x^1, x^2, x^3)$  – произвольная криволинейная система координат трехмерного евклидова пространства; по повторяющимся индексам проводится суммирование, свободные индексы принимают независимо значения 1, 2, 3;  $\sigma_j^i, \varepsilon_j^i, g_j^i$  – смешанные компоненты симметричных тензоров напряжений, деформаций и метрического тензора соответственно,  $u_i$  – компоненты вектора перемещений,  $F_i$  – компоненты вектора плотности массовых сил,  $\rho(x^s)$  – плотность неоднородного материала; символы  $\nabla_i$  – и  $\nabla^i$  обозначают ковариантное и контрвариантное дифференцирование по  $i$ -ой координате соответственно,  $\lambda(x^s), \mu(x^s)$  – параметры Ламенеоднородного материала, представляющие собой непрерывные функции координат.

С точки зрения математического моделирования задача о распределении полей напряжений и перемещений в приконтурной области породного массива, содержащего подземную полость сферической формы, сводится к задаче определения напряженно-деформированного состояния неоднородного пространства в окрестности подземной сферической полости радиуса  $a$  (рисунок 1). Сжимающая нагрузка интенсивностью  $q_a$  равномерно распределенная по внутренней поверхности моделирует собой давление жидкости или газа на приконтурную область массива. На бесконечном удалении от рассматриваемой полости массив находится под действием гидростатического поля напряжений, характеризуемого величиной  $gh$  ( $g$  – объемный вес вышележащих пород,  $h$  – глубина заложения). Задача, постановка которой приведена выше, являлась предметом исследования настоящей работы.

При определении напряженно-деформированного состояния краевые эффекты, связанные с наличием дневной поверхности, не учитывались. Это предположение уместно для полостей, проведенных на достаточно больших глубинах.

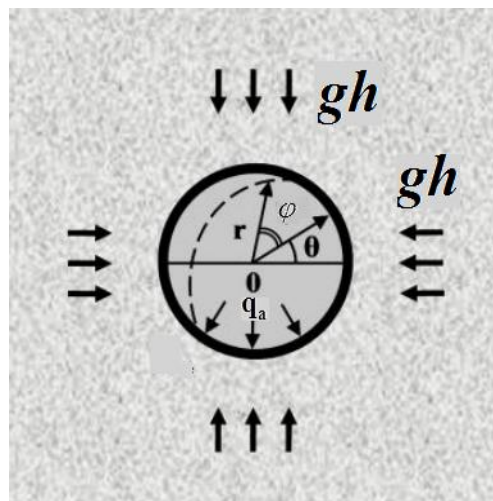


Рисунок 1 – Упругое пространство со сферической полостью при равномерном всестороннем сжатии

Исходя из постановки задачи, в рассматриваемом случае имеет место центральная (полярная) симметрия. Напряженно-деформированное состояние горного массива вблизи подземной полости в сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$  будет описываться только главными ненулевыми компонентами тензоров напряжений и деформаций, а также радиальной составляющей вектора перемещений, которые будут являться функциями радиальной координаты и в силу центральной симметрии удовлетворять следующим условиям:



$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_r(r), \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta(r) = \sigma_\varphi = \sigma_\varphi(r), \\ \varepsilon_r &= \varepsilon_r(r), \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta(r) = \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\varphi(r), \\ u &= u(r).\end{aligned}\tag{4}$$

Технологическую неоднородность упругих свойств материала породного массива будем моделировать радиально неоднородным модулем упругости  $E(r)$  при постоянном значении коэффициента Пуассона  $\nu$ . При этом имеет место следующая зависимость между упругими характеристиками материала:

$$\mu(r) = \frac{E(r)}{2(1+\nu)}, \quad \lambda(r) = \frac{\nu E(r)}{(1+\nu)(1-2\nu)}.\tag{5}$$

С учетом (4) три уравнения равновесия (1) преобразуются к одному:

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + 2(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0;\tag{6}$$

соотношения Коши (2) примут вид:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r};\tag{7}$$

формулы (3) закона Гука, преобразуются к форме:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= (\lambda(r) + 2\mu(r))\varepsilon_r + 2\lambda(r)\varepsilon_\theta, \\ \sigma_\theta = \sigma_\varphi &= \lambda(r)\varepsilon_r + 2(\lambda(r) + \mu(r))\varepsilon_\theta,\end{aligned}\tag{8}$$

граничные условия в напряжениях для рассматриваемой задачи запишутся в форме:

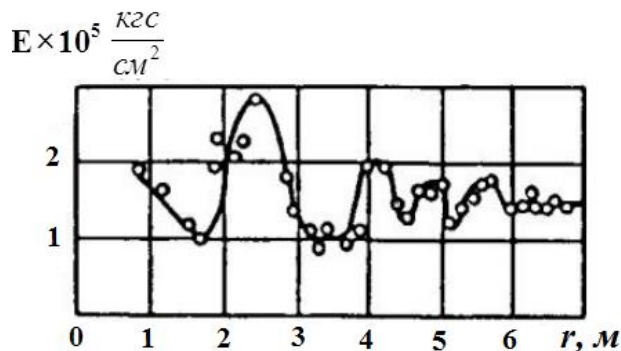
$$\sigma_r|_{r=a} = -q_a, \quad \sigma_r|_{r \rightarrow \infty} = -gh.\tag{9}$$

Уравнение равновесия (1) с учетом (7), (8) и (5) относительно перемещений переписывается в форме:

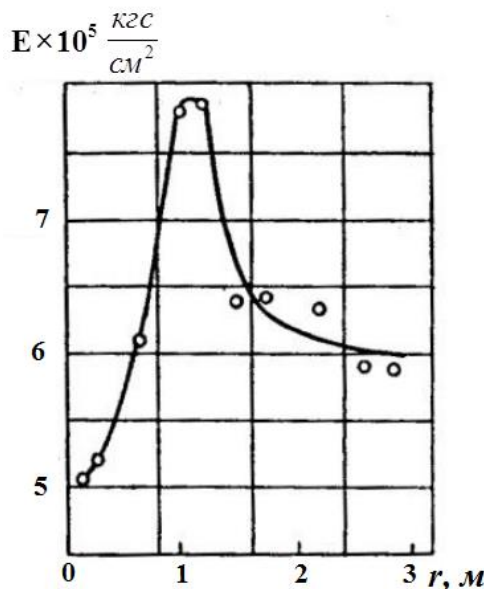
$$E(r)r^2 \frac{d^2u}{dr^2} + \left[ r \frac{dE(r)}{dr} + 2E(r) \right] r \frac{du}{dr} + 2 \left[ \nu_1 r \frac{dE(r)}{dr} - E(r) \right] u = 0,\tag{10}$$

где  $\nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}$ .

Как отмечается в работах [7, 11] распределение модуля упругости  $E(r)$  в приконтурной зоне сферической полости в случае технологической неоднородности представляет собой немонотонные зависимости с выраженным максимумом вблизи ее стенок (рисунок 2).



а) образованной буровзрывным способом в песчано-глинистом сланце ( $h=187$  м)



б) образованной камуфлетным взрывом в песчанике на глубине ( $h=375$  м)

Рисунок 2 – Экспериментальные значения модуля упругости  $E(r)$  вблизи сферической полости

В [11] переменный модуль упругости аппроксимировался полиномом по отрицательным степеням радиальной координаты. Однако данное представление накладывает существенные ограничения на получаемые в дальнейшем решения задачи о напряженно-деформируемом состоянии. В отличие от [11], в настоящей работе предлагается аппроксимировать переменный модуль упругости  $E(r)$  вблизи полости ( $r < r^*$  – область существенной неоднородности) многочленом по положительным степеням радиальной координаты, тогда, как при  $r > r^*$  функция  $E(r)$  будет совпадать с видом предложенным в [1]. В итоге получим:

$$E(r) = \begin{cases} E_0 \sum_{i=0}^m e_i^{(1)} r^i, & r \leq r^*, \\ E_0 \sum_{i=0}^{n-m+1} e_i^{(2)} r^{-i}, & r \geq r^*, \end{cases} \quad (11)$$

где  $E_0$  – значение модуля упругости в нетронутом массиве,  $r^* = 4.6$  м – для случая а),



$r^* = 1.7$  м – для случая б),  $m, n-m$  – количество экспериментальных точек в областях  $a \leq r \leq r^*$  и  $r \geq r^*$  соответственно.

Далее по тексту все величины с размерностью длины отнесены к радиусу  $a$  сферической полости, а с размерностью напряжений – к модулю упругости  $E_0$  нетронутого массива, при этом обозначения безразмерных величин оставим прежними.

Коэффициенты  $e_0^{(1)}, e_1^{(1)}, \dots, e_m^{(1)}$  и  $e_0^{(2)}, e_1^{(2)}, \dots, e_{n-m}^{(2)}$  определим из условия того, что в нетронутом массиве  $E(r) \equiv 1$ , то есть  $\lim_{r \rightarrow \infty} E(r) = E_0$  и из условия прохождения полинома (11) через заданный массив экспериментальных точек  $(r_i, E_i), i=1, \dots, n$ , то есть из решения следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$e_0^{(1)} = 1, E(r_i) = E_i, i = 1, \dots, n. \tag{12}$$

В итоге беря за исходные данные экспериментальные точки, представленные на рисунке 2 для случая б), получим:

$$E(r) = \begin{cases} 1 - 0.327r + 0.251r^2 - 0.075r^3 + 0.011r^4 - 0.89 \cdot 10^{-3}r^5 + 35 \cdot 10^{-6}r^6 - 5 \cdot 10^{-7}r^7, & 1 \leq r \leq r^*, \\ 1 + \frac{132.8}{r} - \frac{9326.7}{r^2} + \frac{213215}{r^3} - \frac{1.57 \cdot 10^6}{r^4}, & r \geq r^*. \end{cases} \tag{13}$$

Функция (13) вместе с экспериментальными точками представлены на рисунке 3.

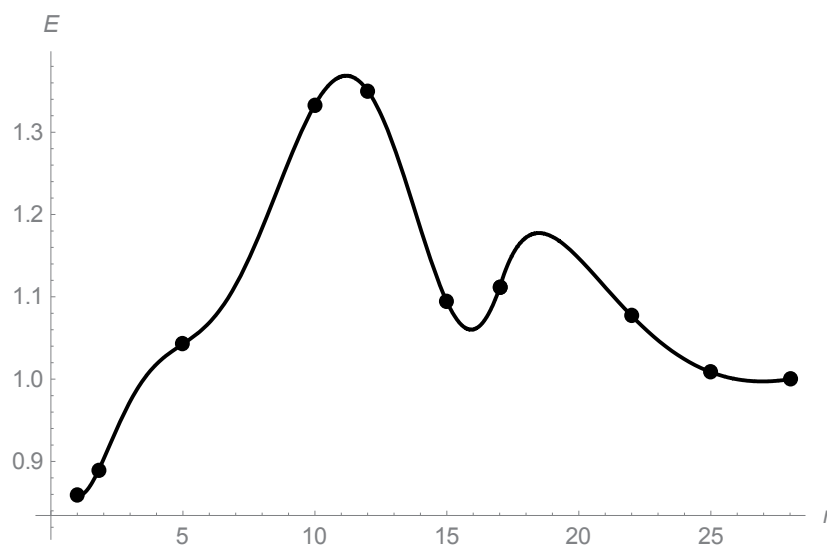


Рисунок 3 – Аппроксимация нормированного модуля упругости составной функцией (13)

Решение уравнения (10) с учетом (13) в каждой из областей  $1 \leq r \leq r^*$  и  $r \geq r^*$  будем искать в виде обобщенных степенных рядов:

$$u(r) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k r^{\lambda+k}. \tag{14}$$

Тогда перемещения для всей области определяются в форме:



$$u(r) = \begin{cases} C_{11} \sum_{k=0}^{\infty} u_{k1}^{(1)} r^{\lambda_1+k} + C_{12} \sum_{k=0}^{\infty} u_{k1}^{(2)} r^{\lambda_2+k}, & 1 \leq r \leq r^* \\ C_{21} \sum_{k=0}^{\infty} u_{k2}^{(1)} r^{\lambda_1-k} + C_{22} \sum_{k=0}^{\infty} u_{k2}^{(2)} r^{\lambda_2-k}, & r \geq r^*. \end{cases} \quad (15)$$

Коэффициенты  $u_{k1}^{(1)}, u_{k1}^{(2)}, k = 1, 2, \dots$  определяются при  $1 \leq r \leq r^*$  по формулам:

$$u_k^{(j)} = - \frac{\sum_{i=1}^m e_i^{(1)} u_{k-i} \left[ (\lambda_j + (k-i))(\lambda_j + (k+1)) - 2(1-iv_1) \right]}{(\lambda_j + k - 1)(\lambda_j + k + 2)}, \quad k = 1, 2, \dots, u_{-k} = 0, j = 1, 2, \lambda_{1,2} = -2, 1,$$

$u_{k2}^{(1)}, u_{k2}^{(2)}, k = 1, 2, \dots$  соответствуют области  $r \geq r^*$  и вычисляются по формулам:

$$u_k^{(j)} = - \frac{\sum_{i=1}^{n-m} e_i^{(2)} u_{k-i} \left[ (\lambda_j + (k-i))(\lambda_j + (k+1)) - 2(1-iv_1) \right]}{(\lambda_j + k - 1)(\lambda_j + k + 2)}, \quad k = 1, 2, \dots, u_{-k} = 0, j = 1, 2, \lambda_{1,2} = -2, 1.$$

Решение (15) содержит четыре неизвестных константы  $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$ , которые определим из граничных условий (9) и условия гладкости функции  $u(r)$ , определяемой соотношением (15), на границе  $r = r^*$ . Указанные условия в перемещениях представляют собой следующую систему четырех уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{du(1)}{dr} + 2\nu_1 u(1) &= - \frac{q_a}{v_0 E(1)}, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{du}{dr} \right) &= - \frac{gh}{v_0}, \\ \lim_{r \rightarrow r^*-0} u(r) &= \lim_{r \rightarrow r^*+0} u(r), \\ \lim_{r \rightarrow r^*-0} \left( \frac{du}{dr} \right) &= \lim_{r \rightarrow r^*+0} \left( \frac{du}{dr} \right). \end{aligned} \right. \quad (16)$$

Решение системы (16) имеет вид:

$$C_{22} = (2\nu - 1)gh, \quad C_{11} = \frac{-q_a}{v_0 E(1)S_2} + (2\nu - 1)gh \frac{S_6 S_9 - S_5 S_{10}}{S_4 S_9 - S_5 S_8},$$

$$C_{12} = \frac{-\frac{q_a}{v_0 E(1)}(S_3 S_9 - S_5 S_7) + (2\nu - 1)gh S_1 (S_6 S_9 - S_5 S_{10})}{S_1 (S_4 S_9 - S_5 S_8) - S_2 (S_3 S_9 - S_5 S_7)},$$





$$C_{21} = \frac{S_3}{S_5 S_2} \frac{-q_a (S_4 S_9 - S_5 S_8) + (1 - 2\nu) gh (S_6 S_9 - S_5 S_{10})}{S_1 (S_4 S_9 - S_5 S_8) - S_2 (S_3 S_9 - S_5 S_7)} + \tag{17}$$

$$+ \frac{S_4}{S_5} \frac{v_0 E(1) (S_3 S_9 - S_5 S_7) + (1 - 2\nu) gh S_1 (S_6 S_9 - S_5 S_{10})}{S_1 (S_4 S_9 - S_5 S_8) - S_2 (S_3 S_9 - S_5 S_7)} + \frac{S_6}{S_5} (1 - 2\nu) gh,$$

где

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} (k - 2 + 2\nu_1) u_{k1}^{(1)}; \quad S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} (k + 1 + 2\nu_1) u_{k1}^{(2)}; \quad S_3 = \sum_{k=0}^{\infty} u_{k1}^{(1)} (r^*)^{k-2};$$

$$S_4 = \sum_{k=0}^{\infty} u_{k1}^{(2)} (r^*)^{k+1}; \quad S_5 = \sum_{k=0}^{\infty} u_{k2}^{(1)} (r^*)^{-k-2}; \quad S_6 = \sum_{k=0}^{\infty} u_{k2}^{(2)} (r^*)^{-k+1};$$

$$S_7 = \sum_{k=0}^{\infty} (k - 2) u_{k1}^{(1)} (r^*)^{k-2}; \quad S_8 = \sum_{k=0}^{\infty} (k + 1) u_{k1}^{(2)} (r^*)^{k+1}; \quad S_9 = \sum_{k=0}^{\infty} (-k - 2) u_{k2}^{(1)} (r^*)^{-k-2};$$

$$S_{10} = \sum_{k=0}^{\infty} (-k + 1) u_{k2}^{(2)} (r^*)^{-k+1}; \quad v_0 = \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}.$$

Таким образом, соотношения (15), (17) определяют поле перемещений породного массива вблизи сферической полости, при аппроксимации неоднородного модуля сдвига обобщенным полиномом (13). По найденным перемещениям последовательно используя соотношения Коши (7) и закон Гука (8) определяются распределения полей деформаций и напряжений соответственно.

Результаты проведенного вычислительного эксперимента представлены на рисунках 4–12.

На рисунках 4–6 показаны распределения компоненты  $u$  вектора перемещения, а также компонент напряжений  $\sigma_r, \sigma_\theta$  соответственно в зависимости от координаты  $r$  при различных значениях интенсивности  $q_a$  напряжений на внутренней поверхности полости и величины гидростатического давления  $gh$ . При этом для каждого рисунка 4–6 кривые 1 соответствуют величине  $q_a = 10^{-3}$ , кривые 2 –  $q_a = 0.5 \cdot 10^{-3}$ , кривые 3 –  $q_a = 0.25 \cdot 10^{-3}$ , кривые 4 –  $q_a = 0.125 \cdot 10^{-3}$ , кривые 5 –  $q_a = 0.0625 \cdot 10^{-3}$ . Кроме того для указанных рисунков бралось  $gh = 2q_a, \nu = 0.33$ .

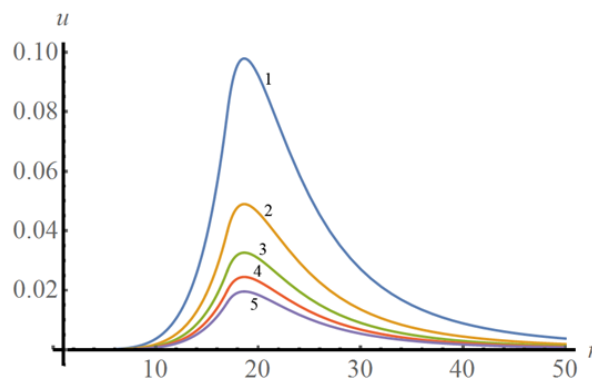


Рисунок 4 – Распределение компоненты  $u$  вектора перемещения в зависимости от координаты  $r$  при различных значениях интенсивности  $q_a$  (кривая 1 соответствует величине  $q_a = 10^{-3}$ , кривая 2 –  $q_a = 0.5 \cdot 10^{-3}$ , кривая 3 –  $q_a = 0.25 \cdot 10^{-3}$ , кривая 4 –  $q_a = 0.125 \cdot 10^{-3}$ , кривая 5 –  $q_a = 0.0625 \cdot 10^{-3}$ )



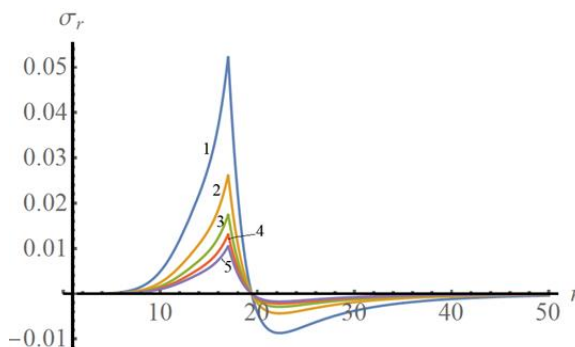


Рисунок 5 – Распределение компоненты  $\sigma_r$  вектора перемещения в зависимости от координаты  $r$  при различных значениях интенсивности  $q_a$  (кривая 1 соответствует величине  $q_a=10^{-3}$ , кривая 2 –  $q_a=0.5 \cdot 10^{-3}$ , кривая 3 –  $q_a=0.25 \cdot 10^{-3}$ , кривая 4 –  $q_a=0.125 \cdot 10^{-3}$ , кривая 5 –  $q_a=0.0625 \cdot 10^{-3}$ )

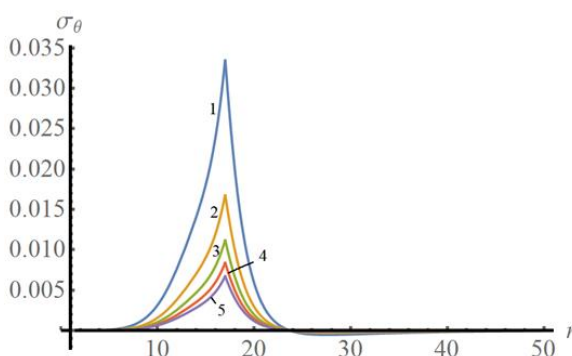


Рисунок 6 – Распределение компоненты  $\sigma_\theta$  вектора перемещения в зависимости от координаты  $r$  при различных значениях интенсивности  $q_a$  (кривая 1 соответствует величине  $q_a=10^{-3}$ , кривая 2 –  $q_a=0.5 \cdot 10^{-3}$ , кривая 3 –  $q_a=0.25 \cdot 10^{-3}$ , кривая 4 –  $q_a=0.125 \cdot 10^{-3}$ , кривая 5 –  $q_a=0.0625 \cdot 10^{-3}$ )

На рисунках 7–9 приведены зависимости аналогичные зависимостям, представленным на рисунках 4–6 с той разницей, что здесь кривые 1 соответствуют случаю, когда  $q_a = \frac{gh}{2}$ , кривые 2 –  $q_a = \frac{gh}{4}$ , кривые 3 –  $q_a = \frac{gh}{8}$ , кривые 4 –  $q_a = \frac{gh}{16}$ . При этом бралось  $gh = -0.5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\nu = 0.33$ .

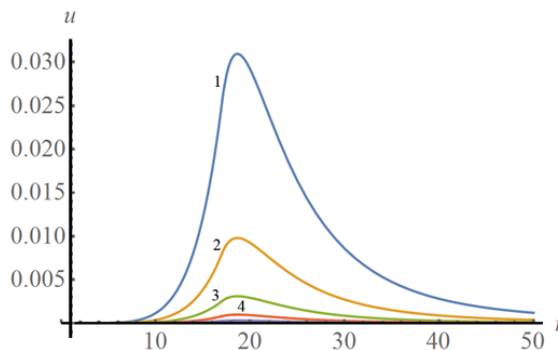


Рисунок 7 – Распределение компоненты  $u$  вектора перемещения в зависимости от координаты  $r$  при различных значениях интенсивности  $q_a$  (кривая 1 соответствует величине  $q_a = \frac{gh}{2}$ , кривая 2 –  $q_a = \frac{gh}{4}$ , кривая 3 –  $q_a = \frac{gh}{8}$ , кривая 4 –  $q_a = \frac{gh}{16}$ )

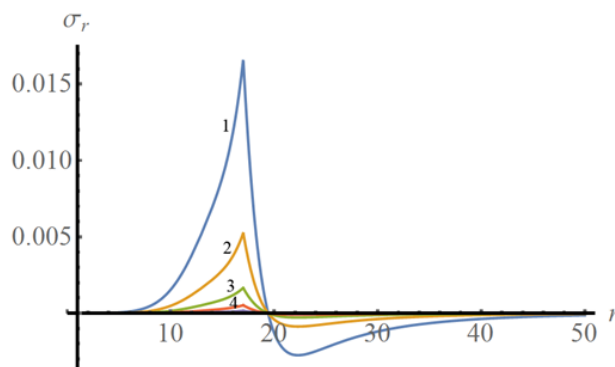


Рисунок 8 – Распределение компоненты  $\sigma_r$  вектора перемещения в зависимости от координаты  $r$  при различных значениях интенсивности  $q_a$  (кривая 1 соответствует величине  $q_a = \frac{gh}{2}$ , кривая 2 –  $q_a = \frac{gh}{4}$ , кривая 3 –  $q_a = \frac{gh}{8}$ , кривая 4 –  $q_a = \frac{gh}{16}$ )

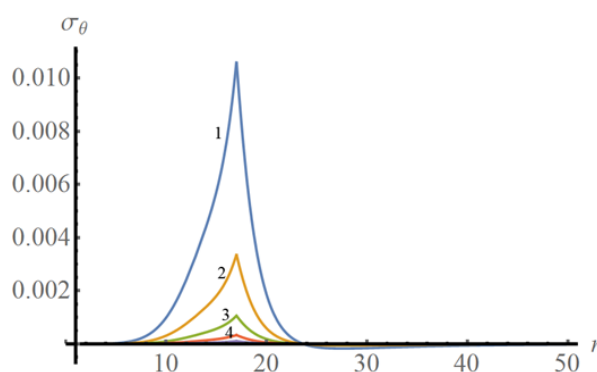


Рисунок 9 – Распределение компоненты  $\sigma_\theta$  вектора перемещения в зависимости от координаты  $r$  при различных значениях интенсивности  $q_a$  (кривая 1 соответствует величине  $q_a = \frac{gh}{2}$ , кривая 2 –  $q_a = \frac{gh}{4}$ , кривая 3 –  $q_a = \frac{gh}{8}$ , кривая 4 –  $q_a = \frac{gh}{16}$ )

На рисунках 10–12 показаны зависимости перемещения  $u(r)$  и напряжений  $\sigma_r(r)$ ,  $\sigma_\theta(r)$  при различных значениях коэффициента Пуассона. При этом кривые 1 соответствуют  $\nu = 0.1$ , кривые 2 –  $\nu = 0.2$ , кривые 3 –  $\nu = 0.3$ , кривые 4 –  $\nu = 0.4$ . Безразмерные параметры других исходных данных брались следующими  $gh = 2q_a = 10^{-3}$ .

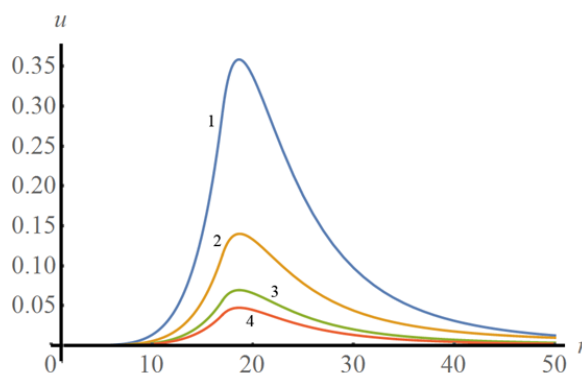


Рисунок 10 – зависимости перемещения  $u(r)$  при различных значениях коэффициента Пуассона (кривая 1 соответствует  $\nu = 0.1$ , кривая 2 –  $\nu = 0.2$ , кривая 3 –  $\nu = 0.3$ , кривая 4 –  $\nu = 0.4$ )

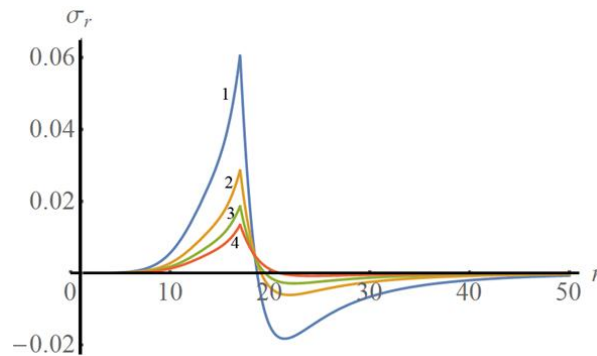


Рисунок 11 – зависимости напряжения  $\sigma_r(r)$  при различных значениях коэффициента Пуассона (кривая 1 соответствует  $\nu=0.1$ , кривая 2 –  $\nu=0.2$ , кривая 3 –  $\nu=0.3$ , кривая 4 –  $\nu=0.4$ )

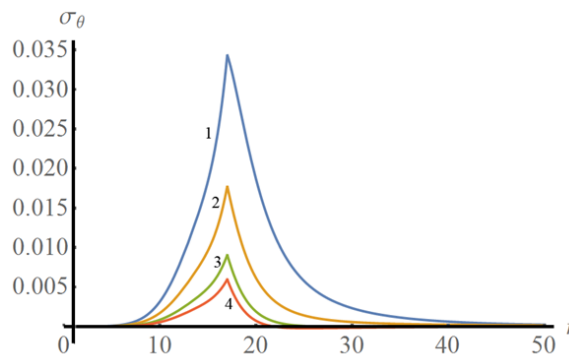


Рисунок 12 – зависимости напряжения  $\sigma_\theta(r)$  при различных значениях коэффициента Пуассона (кривая 1 соответствует  $\nu=0.1$ , кривая 2 –  $\nu=0.2$ , кривая 3 –  $\nu=0.3$ , кривая 4 –  $\nu=0.4$ )

**Выводы.** Таким образом, в настоящей работе разработана математическая модель и найдены аналитические решения, описывающие напряженно-деформированное состояние породного массива вблизи сферической полости с учетом технологической неоднородности его механических свойств. Проведен численный эксперимент для конкретных функциональных зависимостей модуля упругости от радиальной координаты, построены решения, описывающие соответствующие напряженно-деформированные состояния. Осуществлен анализ результатов численного эксперимента, на основе которого сделаны следующие выводы:

наблюдается существенная немонотонность компонент напряженно-деформированного состояния, при этом, как для радиальной компоненты вектора перемещений, так и для главных компонент тензора напряжений характерна точка локального максимума, которая зависит от вида функции аппроксимирующей технологическую неоднородность упругих свойств приконтурной области массива (рисунки 4–12);

с пропорциональным уменьшением интенсивностей внутреннего и гидростатического давлений перемещение и абсолютные значения главных компонент напряжений уменьшаются (рисунки 4–6); такой же эффект наблюдается при уменьшении интенсивности одной из нагрузок (внешней –  $gh$  или внутренней  $q_a$ ) если интенсивность второй нагрузки фиксируется (рисунки 7–9);

рост коэффициента Пуассона  $\nu$  приводит к незначительному уменьшению абсолютных величин, которые характеризуют напряженно-деформированное состояние (рисунки 10–12).

Настоящее исследование имеет немаловажное значение при возведении искусственных покрытий для взлета и посадки воздушного судна на аэродромах Министерства обороны РФ.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баклашов И.В., Руппенейт К.В. Прочность незакрепленных горных выработок. М.: Недра, 1970. 139 с.
2. Баклашов И.В., Картозия Б.А. Механика горных пород. М.: Недра, 1975. 271 с.
3. Бовт А.Н., Ловецкий Е.Е., Селяков В.И. Механическое действие камуфлетного взрыва. М.: Недра, 1990. 184 с.
4. Бовт А.Н., Михайлов А.А., Николаевский В.Н, Шурыгин Е.Л. Камуфлетный взрыв в малопористой твердой среде // Журнал прикладной механики и теоретической физики. 1986. № 1. С. 147–151.
5. Борисовец В.А. Неоднородности волнового характера в породах вблизи выработок, сооружаемых буровзрывным способом // Шахтное строительство. 1972. № 9. С. 7–11.
6. Койфман М.И. Классификация механических свойств твердых тел и вопросы классификации горных пород // В кн. Современные проблемы механики горных пород. Л.: Наука, 1972. С. 252–267.
7. Круглицкий Н.Н. Физико-математические основы регулирования свойств дисперсий глинистых минералов. Киев: Наукова думка, 1968.
8. О напряженном состоянии сцементированной среды при камуфлетном взрыве / А.Н. Бовт, В.И. Кобец, А.М. Масленников и др. // Журнал прикладной механики и теоретической физики. 1980. № 3. С. 137–142.
9. Смирнов В.И. Сооружение подземных емкостей камуфлетными взрывами и выбор методов их закрепления // Шахтное строительство. 1973. № 12. С. 14–17.
10. Спивак А.А. Поведение среды при подземном взрыве // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 1980. № 4. С. 48–55.
11. Алимжанов А.М. Напряженно-деформированное состояние и устойчивость пород приконтурной зоны подземной сферической полости в массиве с технологической неоднородностью механических свойств пород // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело». 2012. № 6. С. 32–46. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.ogbus.ru> (дата обращения 30.11.2018).

REFERENCES

1. Baklashov I.V., Ruppenejt K.V. Prochnost' nezakreplennyh gornyh vyrabotok. M.: Nedra, 1970. 139 p.
2. Bovt A.N., Loveckij E.E., Selyakov V.I. Mehanicheskoe dejstvie kamufletnogo vzryva. M.: Nedra, 1990. 184 p.
3. Baklashov I.V., Kartoziya B.A. Mehanika gornyh porod. M.: Nedra, 1975. 271 p.
4. Bovt A.N., Mihajlov A.A., Nikolaevskij V.N, Shurygin E.L. Kamufletnyj vzryv v maloporistoj tverdoj srede // Zhurnal prikladnoj mehaniki i teoreticheskoy fiziki. 1986. № 1. Pp. 147–151.
5. Borisovec V.A. Neodnorodnosti volnovogo haraktera v porodah vblizi vyrabotok, sooruzhaemyh burovzryvnym sposobom // Shahtnoe stroitel'stvo. 1972. № 9. Pp. 7–11.
6. Kojfman M.I. Klassifikaciya mehanicheskikh svojstv tverdyh tel i voprosy klassifikacii gornyh porod // V kn. Sovremennye problemy mehaniki gornyh porod. L.: Nauka, 1972. Pp. 252–267.
7. Kruglickij N.N. Fiziko-matematicheskie osnovy regulirovaniya svojstv dispersij glinistyh mineralov. Kiev: Naukova dumka, 1968.
8. O napryazhennom sostoyanii scementirovannoj sredy pri kamufletnom vzryve / A.N. Bovt, V.I. Kobec, A.M. Maslennikov i dr. // Zhurnal prikladnoj mehaniki i teoreticheskoy fiziki. 1980. № 3. Pp. 137–142.



9. Smirnov V.I. Sooruzhenie podzemnyh emkostej kamufletnymi vzryvami i vybor metodov ih zakrepleniya // Shahtnoe stroitel'stvo. 1973. № 12. Pp. 14–17.

10. Spivak A.A. Povedenie sredy pri podzemnom vzryve // Fiziko-tehnicheskie problemy razrabotki poleznyh iskopaemyh. 1980. № 4. Pp. 48–55.

11. Alimzhanov A.M. Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie i ustojchivost' porod pri konturnoj zony podzemnoj sfericheskoj polosti v massive s tehnologicheskoy neodnorodnost'yu mehanicheskikh svojstv porod // `Elektronnyj nauchnyj zhurnal «Neftegazovoe delo». 2012. № 6. Pp. 32–46. [Elektronnyj resurs]. Rezhim dostupa: <http://www.ogbus.ru> (data obrascheniya 30.11.2018).

© Гоцев Д.В., Ковалев А.В., Внуков А.Н., 2019

Гоцев Дмитрий Викторович, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математики, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А, [rbgotsev@mail.ru](mailto:rbgotsev@mail.ru).

Ковалев Алексей Викторович, доктор физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник 24 отдела научно-исследовательского научно-исследовательского центра (проблем применения, обеспечения и управления авиацией Военно-воздушных сил), Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А, [kav-mail@mail.ru](mailto:kav-mail@mail.ru).

Внуков Алексей Николаевич, кандидат технических наук, начальник 24 отдела научно-исследовательского научно-исследовательского центра (проблем применения, обеспечения и управления авиацией Военно-воздушных сил), Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А, [vnukov.aleksei@mail.ru](mailto:vnukov.aleksei@mail.ru).