



УДК 629.7.05
ГРНТИ 78.25.13

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МИКРОМЕХАНИЧЕСКОГО ГИРОСКОПА LL-ТИПА С УЧЁТОМ УПРУГОЙ ПОДАТЛИВОСТИ ПОДВЕСОВ НА ВИБРИРУЮЩЕМ ОСНОВАНИИ

*В.С. КИРИЛЛОВ, кандидат физико-математических наук
ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)*

Методом уравнений Лагранжа 2 рода выведена система уравнений движения чувствительных элементов микромеханического гироскопа LL-типа с учётом упругой податливости подвесов на вибрирующем основании. Система уравнений движения и её линейное приближение приведены к векторному виду с матрично-блочными коэффициентами, что упрощает реализацию численных методов решения и перестройку модели гироскопа при добавлении некоторых элементов и параметров. В свою очередь решение уравнений движения микромеханического гироскопа LL-типа со множеством конструктивных элементов и их параметров позволит выработать рекомендации по повышению точности определения ими угловой скорости.

Ключевые слова: микромеханический гироскоп LL-типа, система кинематических уравнений, метод уравнений Лагранжа 2 рода, матрица жёсткостей, блочные матрицы коэффициентов.

LL-TYPE MICROMECHANICAL GYROSCOPE SENSITIVE ELEMENTS MOTION EQUATIONS WITH ACCOUNT FOR ELASTIC MILITABILITY OF SUSPENSIONS ON A VIBRATING BASIS

*V.S. KIRILLOV, Candidate of physico-mathematical sciences
MESC AF «N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy» (Voronezh)*

Using the method of Lagrange equations of the second kind, a system of equations of motion of sensitive elements of an LL-type micromechanical gyroscope is derived taking into account the elastic compliance of suspensions on a vibrating base. The system of equations of motion and its linear approximation are reduced to a vector form with matrix-block coefficients, which simplifies the implementation of numerical methods of solution and the reconstruction of the gyroscope model with the addition of some elements and parameters. In turn, the solution of the equations of motion of an LL-type micromechanical gyroscope with many structural elements and their parameters will make it possible to develop recommendations for improving the accuracy of determining their angular velocity.

Keywords: LL-type micromechanical gyroscope, system of kinematic equations, method of Lagrange equations of the second kind, stiffness matrix, block matrix coefficients.

Введение. Основными тенденциями развития современных систем инерциальной навигации являются уменьшение их габаритных размеров и повышение точности определения местоположения и ориентации объектов. Одним из методов повышения точности является совершенствование датчиков навигационной информации – создание прецизионных датчиков. В частности, создание прецизионных датчиков угловой скорости требует навыков в моделировании гироскопических систем с учётом упругих и демпфирующих свойств их элементов. В данной статье рассмотрим подход к построению математической модели широко



используемых в современной инерциальной навигации датчиков угловой скорости с использованием микроэлектромеханических систем (МЭМС) на примере двухмассового микромеханического гироскопа (ММГ) LL-типа [1, 2].

Актуальность. Широкое использование ММГ в инерциальных навигационных системах определяется их малыми габаритными размерами. Однако точность измерения угловой скорости ими невелика вследствие множества факторов, приводящих к появлению ошибок измерения. Среди этих факторов следует отметить следующие: вибрации со стороны объекта измерения, несовершенство конструкции элементов гироскопа (конечную жесткость подвесов элементов, неточность их изготовления и динамическую несбалансированность, вязкое трение и др.). Все перечисленные факторы приводят к появлению паразитных сил и моментов как по оси возбуждения, так и по оси съема информации, что в конечном счёте вызывает искажения выходного сигнала, снимаемого с датчиков перемещений. Проблема снижения ошибок измерения угловой скорости – создания прецизионных датчиков требует детального анализа вклада каждого из указанных факторов на суммарную ошибку, а также их взаимосвязей. В известных работах [3–6] при решении этой проблемы используются какие-либо эмпирические данные о параметрах гироскопа при построении математической модели. В других работах [2, 7, 8] предполагается больше ограничений, меньше степеней свободы, а значит и меньше факторов, влияющих на ошибку определения угловой скорости. Осуществление же такого анализа без использования эмпирических данных о параметрах гироскопа в целом и с учётом большого числа факторов требует навыков в составлении кинематических уравнений сложных механических систем и приведении их к матрично-блочному виду [9].

Схема и описание элементов микромеханического гироскопа LL-типа. Конструкция двухмассового ММГ LL-типа представлена на рисунке 1:

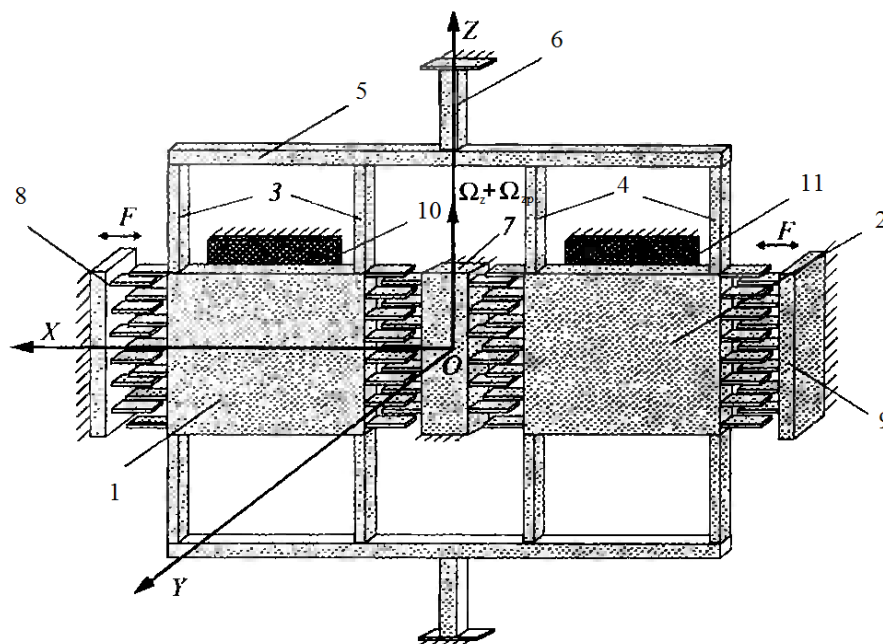


Рисунок 1 – Схема микромеханического гироскопа LL-типа

ММГ представляет собой две инерционные массы (ИМ) 1, 2, которые с помощью упругих элементов (торсионов) 3, 4 смонтированы в раме 5. Рама 5, в свою очередь, посредством торсионов 6 скреплена с корпусом. ИМ электростатическими виброприводами 7 (центральным), 8 (левым) и 9 (правым), имеющими гребенчатую структуру [1, 3], приводятся в колебательные противофазные движения в своей плоскости (XZ) – первичные колебания ИМ.



В данной статье рассмотрим систему, в которой вторичные колебания, вызываемые силой Кориолиса от переносной угловой скорости $\Omega_z + \Omega_{zp}$, будут поступательными в направлении оси OY . Указанные колебания содержат информацию об измеряемой угловой скорости Ω_{zp} и измеряются с помощью емкостных датчиков перемещений, образованных подвижными электродами, расположенными на ИМ 1, 2, и неподвижными электродами 10, 11, размещёнными на корпусе.

При выводе уравнений движения будем полагать, что рама и ИМ имеют конечные и разные жёсткости в направлении осей $OX, OY - G_x, G_y, G_{x1}, G_{y1}$ и G_{x2}, G_{y2} , а торсионы 6 – конечную жесткость на кручение вокруг оси $OZ - G_a$. Жесткости на кручение вокруг оси OZ всех остальных элементов (кроме 6) считаем бесконечно большими. Величины инерционных масс и рамы будем полагать равными M_1, M_2 и M_p соответственно. $A_p, B_p, C_p, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ – главные моменты инерции рамы и ИМ относительно осей OX_p, OY_p, OZ_p . Вектора расстояний между центрами масс (ЦМ) рамы и ИМ и их геометрическими центрами (ГЦ) – $[\delta x_p \delta y_p \delta z_p]^T, [\delta x_1 \delta y_1 \delta z_1]^T, [\delta x_2 \delta y_2 \delta z_2]^T$ соответственно. Эти расстояния могут иметь физическую природу технологических и/или температурных смещений. Коэффициенты диссипации рамы при повороте вокруг оси $OZ - b_a$, при поступательном движении вдоль осей $OX, OY - b_x, b_y$, при поступательном движении 1 и 2 ИМ относительно рамы вдоль осей $O_p X_p, O_p Y_p - b_{x1}, b_{y1}$ и b_{x2}, b_{y2} соответственно. Корпус гироскопа жестко соединён с основанием, на которое воздействуют вибрации со стороны летательного аппарата. С корпусом свяжем систему координат (СК) $OXYZ$. Основание подвержено как поступательным вибрациям со стороны летательного аппарата с ускорениями на оси СК $OXYZ [A] = [A_x \ A_y \ A_z]^T$, так и вращательным с угловыми скоростями $[\Omega] = [\Omega_x \ \Omega_y \ \Omega_z + \Omega_{zp}]^T$, Ω_{zp} – измеряемая угловая скорость. Соответственно скорости будут определяться интегралами от ускорений $[V] = [V_x \ V_y \ V_z]^T$, поступательные перемещения – вторыми интегралами от ускорений $[r] = [r_x \ r_y \ r_z]^T$, а угловые ускорения – $[\dot{\Omega}] = [\dot{\Omega}_x \ \dot{\Omega}_y \ \dot{\Omega}_z + \dot{\Omega}_{zp}]^T$.

Вывод кинематических уравнений микромеханического гироскопа LL-типа. Пояснение взаимного расположения вспомогательных СК, необходимых для вывода уравнений движения, приведено и пояснено на рисунке 2:

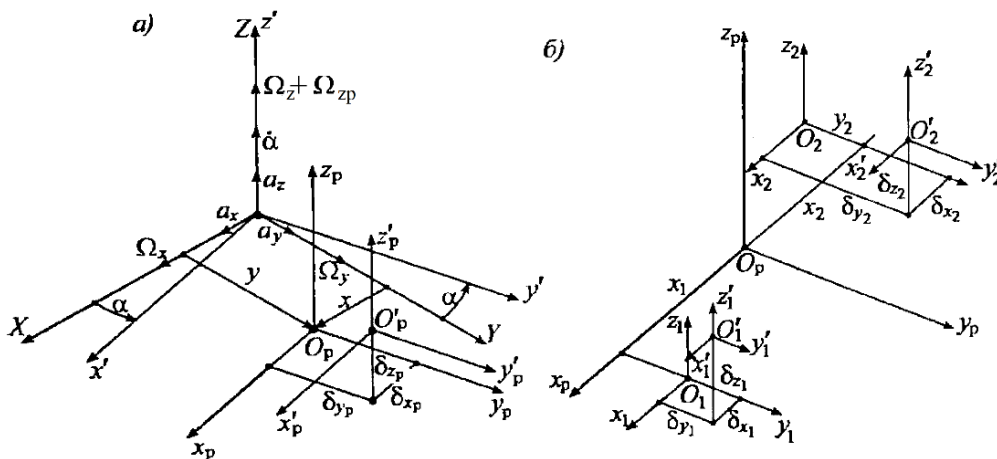


Рисунок 2 – Системы координат: а) для рамы; б) для инерционных масс



На этом рисунке $O'X'Y'Z'$ – СК $OXYZ$, повернутая на угол α вследствие конечной жёсткости торсионов b на кручение;

$O_p X_p Y_p Z_p$ – СК, связанная с ГЦ рамы;

$O'_p X'_p Y'_p Z'_p$ – СК, связанная с ЦМ рамы;

$O_1 X_1 Y_1 Z_1$ – СК, связанная с ГЦ 1 ИМ;

$O'_1 X'_1 Y'_1 Z'_1$ – СК, связанная с ЦМ 1 ИМ;

$O_2 X_2 Y_2 Z_2$ – СК, связанная с ГЦ 2 ИМ;

$O'_2 X'_2 Y'_2 Z'_2$ – СК, связанная с ЦМ 2 ИМ.

Уравнения движения ММГ получим на основе метода уравнений Лагранжа 2 рода [10]. В качестве обобщенных координат возьмём для рамы угловую α и линейные x, y , для первой и второй ИМ соответственно линейные x_1, y_1 и x_2, y_2 . Сначала получим выражения для радиус-векторов и скоростей ЦМ каждого из элементов гироскопа в обобщенных координатах и параметрах системы:

$$[r_{Mp}] = [r] + ([\alpha]^T + [E]) \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + ([\alpha]^T + [E]) \begin{bmatrix} \delta x_p \\ \delta y_p \\ \delta z_p \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$[r_{M1}] = [r] + ([\alpha]^T + [E]) \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + ([\alpha]^T + [E]) \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{y}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + ([\alpha]^T + [E]) \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta y_1 \\ \delta z_1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$[r_{M2}] = [r] + ([\alpha]^T + [E]) \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + ([\alpha]^T + [E]) \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{y}_2 \\ 0 \end{bmatrix} + ([\alpha]^T + [E]) \begin{bmatrix} \delta x_2 \\ \delta y_2 \\ \delta z_2 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где $[E]$ – единичная матрица, $\hat{x}_1 = x_1 + x_{1p}$, $\hat{y}_1 = y_1 + y_{1p}$, $\hat{x}_2 = x_2 + x_{2p}$, $\hat{y}_2 = y_2 + y_{2p}$, x_{1p} – смещение 1 ИМ за счёт силы вибропривода F вдоль оси $O_1 X_1$, y_{1p} – смещение 1 ИМ за счёт силы Кориолиса, вызванной переносной угловой скоростью $\Omega_z + \Omega_{zp}$, вдоль оси $O_1 X_1$; x_{2p} – смещение 2 ИМ за счёт силы вибропривода F вдоль оси $O_2 X_2$, y_{2p} – смещение 2 ИМ за счёт силы Кориолиса, вызванной переносной угловой скоростью $\Omega_z + \Omega_{zp}$, вдоль оси $O_2 Y_2$;

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Соответственно выражения для скоростей будут производными по времени от (1)–(3):

$$[V_{Mp}] = [V] + [\dot{\alpha}]^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + ([\alpha]^T + [E]) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix} + ([\dot{\alpha}]^T) \begin{bmatrix} \delta x_p \\ \delta y_p \\ \delta z_p \end{bmatrix}, \quad (4)$$



$$[V_{M1}] = [V] + [\dot{\alpha}]^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + ([\alpha]^T + [E]) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix} + [\dot{\alpha}]^T \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{y}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + ([\alpha]^T + [E]) \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{y}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + [\dot{\alpha}]^T \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta y_1 \\ \delta z_1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$[V_{M2}] = [V] + [\dot{\alpha}]^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + ([\alpha]^T + [E]) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix} + [\dot{\alpha}]^T \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{y}_2 \\ 0 \end{bmatrix} + ([\alpha]^T + [E]) \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{y}_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где $\hat{x}_1 = \dot{x}_1 + \dot{x}_{1p} = \dot{x}_1 + V_{x1}$, $\hat{y}_1 = \dot{y}_1 + \dot{y}_{1p} = \dot{y}_1 + V_{y1}$, $\hat{x}_2 = \dot{x}_2 + \dot{x}_{2p} = \dot{x}_2 + V_{x2}$, $\hat{y}_2 = \dot{y}_2 + \dot{y}_{2p} = \dot{y}_2 + V_{y2}$.

Выражение для угловой скорости рамы будет иметь вид:

$$[\omega_p] = ([\alpha]^T + [E])[\Omega] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Для получения выражения полной кинетической энергии запишем кинетические энергии поступательного движения каждого из тел (рамы и двух ИМ) по отдельности в виде квадратичных форм:

$$\begin{aligned} T_p &= \frac{1}{2} [V_{MP}]^T [\mu_p] [V_{MP}], \\ T_1 &= \frac{1}{2} [V_{M1}]^T [\mu_1] [V_{M1}], \\ T_2 &= \frac{1}{2} [V_{M2}]^T [\mu_2] [V_{M2}], \end{aligned} \quad (8)$$

где $[\mu_p] = \begin{bmatrix} M_p & 0 & 0 \\ 0 & M_p & 0 \\ 0 & 0 & M_p \end{bmatrix}$, $[\mu_1] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_1 \end{bmatrix}$, $[\mu_2] = \begin{bmatrix} M_2 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 \end{bmatrix}$, M_p – масса рамы,

M_1 – 1 ИМ, M_2 – 2 ИМ.

Кинетическая энергия вращательных колебаний рамы вокруг оси OZ описывается формулой:

$$T_{\text{врот}} = \frac{1}{2} [\omega_p]^T [J_p] [\omega_p], \quad (9)$$

где $[J_p] = \begin{bmatrix} A_p + A_1 + A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_p + B_1 + B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_p + C_1 + C_2 \end{bmatrix}$,

A_p, B_p, C_p – главные моменты инерции рамы относительно осей OX_p, OY_p, OZ_p соответственно, $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ – главные моменты инерции 1 и 2 ИМ относительно осей $O_1X_1Y_1Z_1$ и $O_2X_2Y_2Z_2$ соответственно. Подставим в (8) выражения для скоростей ЦМ каждого из тел (4)–(6) и получим: для кинетической энергии рамы –



$$\begin{aligned}
 T_p = [V]^T & \begin{bmatrix} M_p(y + \delta y_p) & M_p & -\alpha M_p \\ -M_p(x + \delta x_p) & \alpha M_p & M_p \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \\
 & + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_p[(x + \delta x_p)^2] & 0 & 0 \\ 0 & M_p(1 + \alpha^2) & 0 \\ 0 & 0 & M_p(1 + \alpha^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \\
 & + M_p \dot{\alpha} \{ ((y + \delta y_p) - \alpha(x + \delta x_p)) \dot{x} - ((x + \delta x_p) + \alpha(y + \delta y_p)) \dot{y} \},
 \end{aligned} \tag{10}$$

для первой ИМ –

$$\begin{aligned}
 T_1 = [V]^T & \begin{bmatrix} M_1 y & M_1 & -\alpha M_1 \\ -M_1 x & \alpha M_1 & M_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1(x^2 + y^2) & 0 & 0 \\ 0 & M_1(1 + \alpha^2) & 0 \\ 0 & 0 & M_1(1 + \alpha^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \\
 & + [V]^T \begin{bmatrix} M_1(\hat{y}_1 + \delta y_1) & M_1 & -\alpha M_1 \\ -M_1(\hat{x}_1 + \delta x_1) & \alpha M_1 & M_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{y}}_1 \end{bmatrix} + \\
 & + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{y}}_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1[(\hat{x}_1 + \delta x_1)^2 + (\hat{y}_1 + \delta y_1)^2] & 0 & 0 \\ 0 & M_1(1 + \alpha^2) & 0 \\ 0 & 0 & M_1(1 + \alpha^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{y}}_1 \end{bmatrix} + \\
 & + M_1 \dot{\alpha} \{ ((\hat{y}_1 + \delta y_1) - \alpha(\hat{x}_1 + \delta x_1)) \dot{\hat{x}}_1 - ((\hat{x}_1 + \delta x_1) + \alpha(\hat{y}_1 + \delta y_1)) \dot{\hat{y}}_1 \}
 \end{aligned} \tag{11}$$

и для второй –

$$\begin{aligned}
 T_2 = [V]^T & \begin{bmatrix} M_2 y & M_2 & -\alpha M_2 \\ -M_2 x & \alpha M_2 & M_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_2(x^2 + y^2) & 0 & 0 \\ 0 & M_2(1 + \alpha^2) & 0 \\ 0 & 0 & M_2(1 + \alpha^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \\
 & + [V]^T \begin{bmatrix} M_2(\hat{y}_2 + \delta y_2) & M_2 & -\alpha M_2 \\ -M_2(\hat{x}_2 + \delta x_2) & \alpha M_2 & M_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{y}}_2 \end{bmatrix} + \\
 & + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{y}}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_2[(\hat{x}_2 + \delta x_2)^2 + (\hat{y}_2 + \delta y_2)^2] & 0 & 0 \\ 0 & M_2(1 + \alpha^2) & 0 \\ 0 & 0 & M_2(1 + \alpha^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{y}}_2 \end{bmatrix} + \\
 & + M_2 \dot{\alpha} \{ ((\hat{y}_2 + \delta y_2) - \alpha(\hat{x}_2 + \delta x_2)) \dot{\hat{x}}_2 - ((\hat{x}_2 + \delta x_2) + \alpha(\hat{y}_2 + \delta y_2)) \dot{\hat{y}}_2 \}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Подставляя (7) в (9) для кинетической энергии вращательных колебаний рамы получим:



$$T_{prot} = [\Omega]^T ([\alpha] + [E]) [J_p] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}^T [J_p] ([\alpha]^T + [E]) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}^T [J_p] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + T_0 = \quad (13)$$

$$= \frac{1}{2} C_g \dot{\alpha}^2 + C_g (\Omega_z + \Omega_{zp}) \dot{\alpha} + T_0.$$

Слагаемое T_0 не конкретизируем, так как оно пропадает при дифференцировании по обобщенным скоростям и координатам. Просуммируем все слагаемые кинетической энергии каждого из тел (формулы 10–13), содержащие только векторы обобщенных скоростей, и получим следующую квадратичную форму:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{y}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{y}}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Gq_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_g(1+\alpha^2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_g(1+\alpha^2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_1(1+\alpha^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_1(1+\alpha^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_2(1+\alpha^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_2(1+\alpha^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{y}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{y}}_2 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где $Gq_{11} = \frac{C_g}{2} + M_p \left\{ (x + \delta x_p)^2 + (y + \delta y_p)^2 \right\} + M_1 \left\{ x^2 + y^2 + (\hat{x}_1 + \delta x_1)^2 + (\hat{y}_1 + \delta y_1)^2 \right\} + M_2 \left\{ x^2 + y^2 + (\hat{x}_2 + \delta x_2)^2 + (\hat{y}_2 + \delta y_2)^2 \right\}$,

$$M_g = M_p + M_1 + M_2.$$

Слагаемые с вектором входных воздействий при суммировании дадут следующую квадратичную форму:

$$[V]^T \begin{bmatrix} M_1(y + \hat{y}_1 + \delta y_1) + M_2(y + \hat{y}_2 + \delta y_2) & M_1 + M_2 & -\alpha(M_1 + M_2) & M_1 & -\alpha M_1 & M_2 & -\alpha M_2 \\ -M_1(x + \hat{x}_1 + \delta x_1) - M_2(x + \hat{x}_2 + \delta x_2) & \alpha(M_1 + M_2) & M_1 + M_2 & \alpha M_1 & M_1 & \alpha M_2 & M_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{y}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{y}}_2 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Соответственно сумма оставшихся слагаемых будет иметь вид:

$$M_p \dot{\alpha} \left\{ ((y + \delta y_p) - \alpha(x + \delta x_p)) \dot{x} - ((x + \delta x_p) + \alpha(y + \delta y_p)) \dot{y} \right\} +$$

$$+ M_1 \dot{\alpha} \left\{ ((\hat{y}_1 + \delta y_1) - \alpha(\hat{x}_1 + \delta x_1)) \dot{\hat{x}}_1 - ((\hat{x}_1 + \delta x_1) + \alpha(\hat{y}_1 + \delta y_1)) \dot{\hat{y}}_1 \right\} + \quad (16)$$

$$+ M_2 \dot{\alpha} \left\{ ((\hat{y}_2 + \delta y_2) - \alpha(\hat{x}_2 + \delta x_2)) \dot{\hat{x}}_2 - ((\hat{x}_2 + \delta x_2) + \alpha(\hat{y}_2 + \delta y_2)) \dot{\hat{y}}_2 \right\} + 2C_g \Omega_z \dot{\alpha} + T_0.$$

Выражение для потенциальной энергии всего ММГ будет иметь вид:



$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 [\delta_i]^T [K_i] [\delta_i], \quad (17)$$

где $[K_1] = [K_p]$, $[K_2] = [K_1]$, $[K_3] = [K_2]$, $[\delta_p] = [\alpha] \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$, $[\delta_1] = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[\delta_2] = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[K_p] = \begin{bmatrix} G_a & 0 & 0 \\ 0 & G_x & 0 \\ 0 & 0 & G_y \end{bmatrix}$,
 $[K_1] = \begin{bmatrix} G_{x1} & 0 \\ 0 & G_{y1} \end{bmatrix}$, $[K_2] = \begin{bmatrix} G_{x2} & 0 \\ 0 & G_{y2} \end{bmatrix}$. Здесь $[K_p]$, $[K_1]$, $[K_2]$ – матрицы жесткостей рамы, 1 и 2 ИМ соответственно [11]. Аналогично тому, как это было сделано для кинетической энергии, потенциальную энергию всего ММГ можно привести к виду:

$$U = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha \\ x \\ y \\ \hat{x}_1 \\ \hat{y}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{y}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_a + G_x \alpha^2 & (G_a - G_x) \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (G_a - G_x) \alpha & G_x + G_a \alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{x1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{y1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{x2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{y2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ x \\ y \\ \hat{x}_1 \\ \hat{y}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{y}_2 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Выражение для диссипативной функции всего ММГ:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 [\dot{\delta}_i]^T [B_{Ai}] [\dot{\delta}_i], \quad (19)$$

где $[B_{A1}] = [B_{Ap}]$, $[B_{A2}] = [B_{A1}]$, $[B_{A3}] = [B_{A2}]$, $[\dot{\delta}_i] = [\dot{\alpha}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + ([\alpha] + [E]) \dot{y}$, $[\dot{\delta}_1] = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[\dot{\delta}_2] = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$,
 $[B_{Ap}] = \begin{bmatrix} b_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & b_x & 0 \\ 0 & 0 & b_y \end{bmatrix}$, $[B_{A1}] = \begin{bmatrix} b_{x1} & 0 \\ 0 & b_{y1} \end{bmatrix}$, $[B_{A2}] = \begin{bmatrix} b_{x2} & 0 \\ 0 & b_{y2} \end{bmatrix}$. Здесь B_{Ap} , B_{A1} , B_{A2} – матрицы коэффициентов демпфирования [3]. Аналогично тому, как это было сделано для кинетической и потенциальной энергий, диссипативную функцию всего ММГ можно привести к виду:

$$H = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{y}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{y}}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_x x^2 + b_\alpha y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_\alpha + b_x \alpha^2 & (b_\alpha - b_x) \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (b_\alpha - b_x) \alpha & b_x + b_\alpha \alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{x1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{y1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{x2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{y2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{y}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{y}}_2 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Для построения уравнений Лагранжа 2 рода



$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_j} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \theta_j} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial \theta_j} \right) + \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}_j} \right) = 0, j = 1..7, \quad (21)$$

где $\theta = [\alpha \ x \ y \ x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2]^T$ – вектор обобщённых координат, $\dot{\theta} = [\dot{\alpha} \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{x}_1 \ \dot{y}_1 \ \dot{x}_2 \ \dot{y}_2]^T$ – вектор обобщённых скоростей, преобразуем выражения (14)–(16), (18) и (20) для кинетической, потенциальной энергии и диссипативной функции соответственно к матрично-блочному виду, согласно тому, как это сделано в [9]. Для производных по времени от частных производных кинетической энергии по обобщённым скоростям воспользуемся следующим соотношением:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_j} \right) &= \frac{1}{2} [E_j]^T [G_q] ([\ddot{\theta}] + [BA]) + \frac{1}{2} ([\dot{\theta}]^T + [BA]^T) [G_q] [E_j] + \\ &+ \frac{1}{2} [E_j]^T [DG_q] ([\dot{\theta}] + [BV]) + \frac{1}{2} ([\dot{\theta}]^T + [BV]^T) [DG_q] [E_j] + \\ &+ \frac{1}{2} [A]^T [G_{imp}] [E_j] + \frac{1}{2} [V]^T [DG_{imp}] [E_j] + \frac{1}{2} [E_j]^T [FE], j = 1..7, \end{aligned} \quad (22)$$

где $[G_q], [G_{imp}]$ – матрицы квадратичных форм (14) и (15), содержащих только векторы обобщённых скоростей и содержащих вектор входных воздействий соответственно, $[DG_q], [DG_{imp}]$ – производные по времени матриц $[G_q], [G_{imp}]$ соответственно, вектор $[BA] = [0 \ 0 \ 0 \ A_{x1} \ A_{y1} \ A_{x2} \ A_{y2}]^T$, $A_{x1} = \ddot{x}_{1p}$, $A_{y1} = \ddot{y}_{1p}$, $A_{x2} = \ddot{x}_{2p}$, $A_{y2} = \ddot{y}_{2p}$. Вектор $[FE]$ определяется следующим образом:

$$[FE] = \begin{bmatrix} FE_1 \\ 2M_p \{ \ddot{\alpha} (y + \delta y_p - \alpha (x + \delta x_p)) + \dot{\alpha} (\dot{y} - \dot{\alpha} (x + \delta x_p) - \alpha \dot{x}) \} \\ -2M_p \{ \ddot{\alpha} (x + \delta x_p + \alpha (y + \delta y_p)) + \dot{\alpha} (\dot{x} + \dot{\alpha} (y + \delta y_p) + \alpha \dot{y}) \} \\ 2M_1 \{ \ddot{\alpha} (\hat{y}_1 + \delta y_1 - \alpha (\hat{x}_1 + \delta x_1)) + \dot{\alpha} (\dot{\hat{y}}_1 - \dot{\alpha} (\hat{x}_1 + \delta x_1) - \alpha \dot{\hat{x}}_1) \} \\ -2M_1 \{ \ddot{\alpha} (\hat{x}_1 + \delta x_1 - \alpha (\hat{y}_1 + \delta y_1)) + \dot{\alpha} (\dot{\hat{x}}_1 - \dot{\alpha} (\hat{y}_1 + \delta y_1) - \alpha \dot{\hat{y}}_1) \} \\ 2M_2 \{ \ddot{\alpha} (\hat{y}_2 + \delta y_2 - \alpha (\hat{x}_2 + \delta x_2)) + \dot{\alpha} (\dot{\hat{y}}_2 - \dot{\alpha} (\hat{x}_2 + \delta x_2) - \alpha \dot{\hat{x}}_2) \} \\ -2M_2 \{ \ddot{\alpha} (\hat{x}_2 + \delta x_2 - \alpha (\hat{y}_2 + \delta y_2)) + \dot{\alpha} (\dot{\hat{x}}_2 - \dot{\alpha} (\hat{y}_2 + \delta y_2) - \alpha \dot{\hat{y}}_2) \} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} FE_1 &= 2M_p \{ (\dot{y} - \dot{\alpha} (x + \delta x_p) - \alpha \dot{x}) \dot{x} + (y + \delta y_p - \alpha (x + \delta x_p)) \ddot{x} \} - \\ &- 2M_p \{ (\dot{x} + \dot{\alpha} (y + \delta y_p) + \alpha \dot{y}) \dot{y} + (x + \delta x_p + \alpha (y + \delta y_p)) \ddot{y} \} + \\ &+ 2M_1 \{ (\dot{\hat{y}}_1 - \dot{\alpha} (\hat{x}_1 + \delta x_1) - \alpha \dot{\hat{x}}_1) \dot{\hat{x}}_1 + (\hat{y}_1 + \delta y_1 - \alpha (\hat{x}_1 + \delta x_1)) \ddot{\hat{x}}_1 \} - \\ &- 2M_1 \{ (\dot{\hat{x}}_1 - \dot{\alpha} (\hat{y}_1 + \delta y_1) - \alpha \dot{\hat{y}}_1) \dot{\hat{y}}_1 + (\hat{x}_1 + \delta x_1 - \alpha (\hat{y}_1 + \delta y_1)) \ddot{\hat{y}}_1 \} \\ &+ 2M_2 \{ (\dot{\hat{y}}_2 - \dot{\alpha} (\hat{x}_2 + \delta x_2) - \alpha \dot{\hat{x}}_2) \dot{\hat{x}}_2 + (\hat{y}_2 + \delta y_2 - \alpha (\hat{x}_2 + \delta x_2)) \ddot{\hat{x}}_2 \} \\ &- 2M_2 \{ (\dot{\hat{x}}_2 - \dot{\alpha} (\hat{y}_2 + \delta y_2) - \alpha \dot{\hat{y}}_2) \dot{\hat{y}}_2 + (\hat{x}_2 + \delta x_2 - \alpha (\hat{y}_2 + \delta y_2)) \ddot{\hat{y}}_2 \}, \end{aligned} \quad [E_j]^T = \begin{bmatrix} \overbrace{0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0}^j \end{bmatrix}.$$



Из вектора $[FE]$ выделим линейную часть

$$[FEL] = [FEL_1 \quad M_p \delta y_p \ddot{\alpha} \quad -M_p \delta x_p \ddot{\alpha} \quad M_1 \delta y_1 \ddot{\alpha} \quad -M_1 \delta x_1 \ddot{\alpha} \quad M_2 \delta y_2 \ddot{\alpha} \quad -M_2 \delta x_2 \ddot{\alpha}]^T,$$

$FEL_1 = M_p \delta y_p \ddot{x} - M_p \delta x_p \ddot{y} + M_1 \delta y_1 \ddot{x}_1 - M_1 \delta x_1 \ddot{y}_1 + M_2 \delta y_2 \ddot{x}_2 - M_2 \delta x_2 \ddot{y}_2$ и запишем её в виде:

$$[FEL] = \begin{bmatrix} 0 & [GV_{Elin}]^T \\ [GV_{Elin}] & [0] \end{bmatrix} ([\ddot{\theta}] + [BA]) = [G_{Elin}] ([\ddot{\theta}] + [BA]), \quad (23)$$

где $[GV_{Elin}] = [M_p \delta y_p \quad -M_p \delta x_p \quad M_1 \delta y_1 \quad -M_1 \delta x_1 \quad M_2 \delta y_2 \quad -M_2 \delta x_2]^T$, $[0]$ – нулевая матрица размерности 6×6 . Соотношение для частных производных потенциальной энергии по обобщенным координатам будет иметь вид:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_j} = \frac{1}{2} [E_j]^T [G_u] ([\theta] + [BR]) + \frac{1}{2} ([\theta] + [BR])^T ([DG_{uj}] ([\theta] + [BR]) + [G_u] [E_j]), \quad (24)$$

где $[G_u]$ – матрица квадратичной формы для потенциальной энергии (18), вектор

$$[BR] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad x_{1p} \quad y_{1p} \quad x_{2p} \quad y_{2p}]^T,$$

$$[DG_{uj}] = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2G_x \alpha & G_x - G_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_x - G_x & 2G_x \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, j=1 \\ [0], j=2..7 \end{cases} \quad - \text{набор матриц производных } [G_u] \text{ по}$$

обобщенным координатам θ_j , $[0]$ – нулевая матрица размерности 7×7 . Соотношение для частных производных диссипативной функции по обобщенным скоростям будет иметь вид:

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}_j} = \frac{1}{2} [E_j]^T [G_H] ([\dot{\theta}] + [BV]) + \frac{1}{2} ([\dot{\theta}] + [BV])^T [G_H] [E_j], \quad (25)$$

где $[G_H]$ – матрица квадратичной формы для диссипативной функции (20), вектор

$[BV] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad V_{x1} \quad V_{y1} \quad V_{x2} \quad V_{y2}]^T$. Вследствие диагональности матрицы $[G_q]$ можно записать соотношение:

$$\frac{1}{2} \left\{ [E_j]^T [G_q] ([\ddot{\theta}] + [BA]) + ([\ddot{\theta}] + [BA])^T [G_q] [E_j] \right\} = [E_j]^T [G_q] ([\ddot{\theta}] + [BA]), \quad (26)$$

кроме того, можно получить следующие соотношения из свойств транспонирования матриц:

$$[A]^T [G_{imp}] [E_j] = [E_j]^T [G_{imp}]^T [A], \quad (27)$$

$$[V]^T [DG_{imp}] [E_j] = [E_j]^T [DG_{imp}]^T [V]. \quad (28)$$



Воспользовавшись формулами (26)–(28) перепишем выражение (22) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_j} \right) &= [E_j]^T [G_q] ([\ddot{\theta}] + [BA]) + [E_j]^T [DG_q] ([\dot{\theta}] + [BV]) + \\ &+ \frac{1}{2} [E_j]^T [G_{imp}]^T [A] + \frac{1}{2} [E_j]^T [DG_{imp}]^T [V] + \frac{1}{2} [E_j]^T [FE], \quad j = 1..7. \end{aligned} \quad (29)$$

Воспользовавшись соотношением

$$\frac{1}{2} ([\theta] + [BR])^T [DG_u] ([\theta] + [BR]) = G_x \alpha x^2 + (G_\alpha - G_x) xy + G_\alpha \alpha y^2 \quad (30)$$

выражение (24) перепишем в следующем виде:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_j} = \begin{cases} [E_j]^T [G_u] ([\theta] + [BR]) + G_x \alpha x^2 + (G_\alpha - G_x) xy + G_\alpha \alpha y^2, \quad j = 1, \\ [E_j]^T [G_u] ([\theta] + [BR]), \quad j = 2..7. \end{cases} \quad (31)$$

Аналогичным образом выражение (25) перепишем в виде:

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}_j} = [E_j]^T [G_H] ([\dot{\theta}] + [BV]). \quad (32)$$

В свою очередь вектор

$$[G_{imp}]^T [A] = \begin{bmatrix} 0 & -[MAW]^T \\ [MAW] & [0] \end{bmatrix} ([\theta] + [BR]) + [GA0] = [MA] ([\theta] + [BR]) + [GA0], \quad (33)$$

где $[MAW] = [M_g A_y \quad -M_g A_x \quad M_1 A_y \quad -M_1 A_x \quad M_2 A_y \quad -M_2 A_x]^T$, $[0]$ – нулевая матрица размерности 6×6 ,

$[GA0] = [GA0_1 \quad M_g A_x \quad M_g A_y \quad M_1 A_x \quad M_1 A_y \quad M_2 A_x \quad M_2 A_y]^T$,

$GA0_1 = M_p (\delta y_p A_x - \delta x_p A_y) + M_1 (\delta y_1 A_x - \delta x_1 A_y) + M_2 (\delta y_2 A_x - \delta x_2 A_y)$, а вектор

$$[DG_{imp}]^T [V] = \begin{bmatrix} 0 & -[MVW]^T \\ [MVW] & [0] \end{bmatrix} ([\dot{\theta}] + [BV]) = [MV] ([\dot{\theta}] + [BV]), \quad (34)$$

где $[MVW] = [M_g V_y \quad -M_g V_x \quad M_1 V_y \quad -M_1 V_x \quad M_2 V_y \quad -M_2 V_x]^T$, $[0]$ – нулевая матрица размерности 6×6 . Подставляя преобразованные выражения (29), (31) и (32) для каждой из частей системы уравнений Лагранжа 2 рода в их общий вид (21) и переходя от системы уравнений для обобщенных координат θ_j к уравнению для вектора обобщенных координат $[\theta]$ получим векторное уравнение движения ММГ LL-типа:

$$\begin{aligned} &([G_q] + [G_{Elim}]) [\ddot{\theta}] + ([G_H] + [DG_q] + [MV]) [\dot{\theta}] + ([G_u] + [MA]) [\theta] + [G_{Enl}] + [GA0] + [GS0] + \\ &+ [DGV] + ([G_q] + [G_{Elim}]) [BA] + ([G_u] + [MA]) [BR] + ([G_H] + [DG_q] + [MV]) [BV] = [0], \end{aligned} \quad (35)$$



где

$$[G_{Eint}] = \begin{bmatrix} GE_1 \\ 2M_p \{ \ddot{\alpha}(y - \alpha(x + \delta x_p)) + \dot{\alpha}(\dot{y} - \dot{\alpha}(x + \delta x_p) - \alpha \dot{x}) \} \\ -2M_p \{ \ddot{\alpha}(x + \alpha(y + \delta y_p)) + \dot{\alpha}(\dot{x} + \dot{\alpha}(y + \delta y_p) - \alpha \dot{y}) \} \\ 2M_1 \{ \ddot{\alpha}(\hat{y}_1 - \alpha(\hat{x}_1 + \delta x_1)) + \dot{\alpha}(\dot{\hat{y}}_1 - \dot{\alpha}(\hat{x}_1 + \delta x_1) - \alpha \dot{\hat{x}}_1) \} \\ -2M_1 \{ \ddot{\alpha}(\hat{x}_1 - \alpha(\hat{y}_1 + \delta y_1)) + \dot{\alpha}(\dot{\hat{x}}_1 - \dot{\alpha}(\hat{y}_1 + \delta y_1) - \alpha \dot{\hat{y}}_1) \} \\ 2M_2 \{ \ddot{\alpha}(\hat{y}_2 - \alpha(\hat{x}_2 + \delta x_2)) + \dot{\alpha}(\dot{\hat{y}}_2 - \dot{\alpha}(\hat{x}_2 + \delta x_2) - \alpha \dot{\hat{x}}_2) \} \\ -2M_2 \{ \ddot{\alpha}(\hat{x}_2 - \alpha(\hat{y}_2 + \delta y_2)) + \dot{\alpha}(\dot{\hat{x}}_2 - \dot{\alpha}(\hat{y}_2 + \delta y_2) - \alpha \dot{\hat{y}}_2) \} \end{bmatrix},$$

$$GE_1 = 2M_p \{ (\dot{y} - \dot{\alpha}(x + \delta x_p) - \alpha \dot{x}) \dot{x} + (y - \alpha(x + \delta x_p)) \ddot{x} \} - \\ -2M_p \{ (\dot{x} + \dot{\alpha}(y + \delta y_p) + \alpha \dot{y}) \dot{y} + (x + \alpha(y + \delta y_p)) \ddot{y} \} + \\ +2M_1 \{ (\dot{\hat{y}}_1 - \dot{\alpha}(\hat{x}_1 + \delta x_1) - \alpha \dot{\hat{x}}_1) \dot{\hat{x}}_1 + (\hat{y}_1 - \alpha(\hat{x}_1 + \delta x_1)) \ddot{\hat{x}}_1 \} - \\ -2M_1 \{ (\dot{\hat{x}}_1 - \dot{\alpha}(\hat{y}_1 + \delta y_1) - \alpha \dot{\hat{y}}_1) \dot{\hat{y}}_1 + (\hat{x}_1 - \alpha(\hat{y}_1 + \delta y_1)) \ddot{\hat{y}}_1 \} \\ +2M_2 \{ (\dot{\hat{y}}_2 - \dot{\alpha}(\hat{x}_2 + \delta x_2) - \alpha \dot{\hat{x}}_2) \dot{\hat{x}}_2 + (\hat{y}_2 - \alpha(\hat{x}_2 + \delta x_2)) \ddot{\hat{x}}_2 \} \\ -2M_2 \{ (\dot{\hat{x}}_2 - \dot{\alpha}(\hat{y}_2 + \delta y_2) - \alpha \dot{\hat{y}}_2) \dot{\hat{y}}_2 + (\hat{x}_2 - \alpha(\hat{y}_2 + \delta y_2)) \ddot{\hat{y}}_2 \},$$

$$[GS0] = [2C_g(\dot{\Omega}_z + \dot{\Omega}_{zp}) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T,$$

$$[DGV] = [2G_x \alpha x^2 + 2(G_\alpha - G_x)xy + 2G_\alpha \alpha y^2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, \quad [0] - \text{нулевой вектор размерности 7.}$$

Для удобства реализации численного метода решения запишем векторное дифференциальное уравнение (35) в первом (линейном) приближении:

$$([G_{qlin}] + [G_{Elin}])[\ddot{\theta}] + ([G_{Hlin}] + [DG_{q0}] + [MV])[\dot{\theta}] + ([G_{ulin}] + [MA])[\theta] + [GA0] + [GS0] + \\ + ([G_{qlin}] + [G_{Elin}])[BA] + ([G_{ulin}] + [MA])[BR] + ([G_{Hlin}] + [DG_{q1}] + [DG_{q0}] + [MV])[BV] = [0], \quad (36)$$

$$\text{где } [G_{qlin}] = \begin{bmatrix} Gqlin_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_2 \end{bmatrix}, \quad [G_{ulin}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{x1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{y1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{x2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{y2} \end{bmatrix},$$



$$[G_{Hlin}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{x1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{y1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{x2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{y2} \end{bmatrix}, \quad [DG_{g_0}] = \begin{bmatrix} dg_0 & [0]_{1 \times 6} \\ [0]_{6 \times 1} & [0]_{6 \times 6} \end{bmatrix}, \quad [DG_{g_1}] = \begin{bmatrix} dg_1 & [0]_{1 \times 6} \\ [0]_{6 \times 1} & [0]_{6 \times 6} \end{bmatrix},$$

$$G_{qlin_{11}} = \frac{C_g}{2} + M_p (\delta x_p^2 + \delta y_p^2) + M_1 (\delta x_1^2 + \delta y_1^2 + x_{1p}^2 + y_{1p}^2) + M_2 (\delta x_2^2 + \delta y_2^2 + x_{2p}^2 + y_{2p}^2),$$

$$dg_0 = 2M_1 (x_{1p} + \delta x_1) V_{x1} + 2M_1 (y_{1p} + \delta y_1) V_{y1} + 2M_2 (x_{2p} + \delta x_2) V_{x2} + 2M_2 (y_{2p} + \delta y_2) V_{y2},$$

$$dg_1 = 2M_p \delta x_p \dot{x} + 2M_p \delta y_p \dot{y} + 2M_1 (x_{1p} + \delta x_1) \dot{x}_1 + 2M_1 V_{x1} x_1 + 2M_1 (y_{1p} + \delta y_1) \dot{y}_1 + 2M_1 V_{y1} y_1 + 2M_2 (x_{2p} + \delta x_2) \dot{x}_2 + 2M_2 V_{x2} x_2 + 2M_2 (y_{2p} + \delta y_2) \dot{y}_2 + 2M_2 V_{y2} y_2.$$

Выводы. Матрично-блочный подход к составлению уравнений Лагранжа 2 рода существенно упрощает математические преобразования и затраты ручного труда при выводе системы кинематических уравнений ММГ LL-типа. Представление самой системы кинематических уравнений ММГ и её линейного приближения в векторном виде с матрично-блочными коэффициентами снижает временные затраты на программирование при реализации численных методов решения на ЭВМ. Кроме того, такая форма записи системы кинематических уравнений позволяет легко осуществлять перестройку модели: добавлять недиагональные компоненты в матрицы жесткостей элементов, недиагональные компоненты тензоров инерции элементов (учёт динамической несбалансированности), добавлять дополнительные массивные элементы в систему (например, учитывать конечную массу подвесов элементов или рассматривать гироскопы с большим количеством инерционных масс). Решение подобных систем кинематических уравнений с различными параметрами поможет осуществить анализ вклада каждого из вредных факторов на суммарную ошибку измерения угловой скорости датчиками на основе МЭМС. Это в свою очередь позволит выработать рекомендации по разработке прецизионных датчиков, что поспособствует и повышению точности инерциальных навигационных систем в целом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Распопов В.Я. Микромеханические приборы: учебное пособие. М.: Машиностроение, 2007. 400 с.
2. Матвеев В.В., Серёгин С.И. Математические модели микромеханических гироскопов LL-типа // Известия ТулГУ. Технические науки. 2012. Вып. 12. Ч.1. С. 205–213.
3. Бабрин Е.С., Баранов П.Ф. Моделирование конструкционных и динамических характеристик двухкомпонентного микромеханического гироскопа // Вестник науки Сибири. 2013. № 1 (7). С. 96–105.
4. Некрасов Я.А. Методы повышения точности съёма информации в микромеханических гироскопах: дис. ... канд. техн. наук. Санкт-Петербург, 2007. 125 с.
5. Пономарёв Ю.А. Двухкоординатный компенсационный микромеханический гироскоп: дис. ... канд. техн. наук. Москва, 2013. 265 с.



6. Моисеев Н.В. Микромеханический гироскоп компенсационного типа с расширенным диапазоном измерения: дис. ... канд. техн. наук. Санкт-Петербург, 2015. 123 с.
7. Барулина М.А. Температурные и технологические погрешности микромеханических гироскопов: дис. ... канд. техн. наук. Саратов, 2004. 171 с.
8. Барулина М.А., Джашитов В.Э. Математическая модель камертонного микромеханического гироскопа // Механика деформируемых сред. 2004. № 15. С. 43–49.
9. Бачкало Б.И. Уравнения движения гиростабилизированной платформы с учётом упругой податливости её элементов // Автоматика и вычислительная техника. 1966. Вып. 12. С. 47–56.
10. Ландау Л.Д. Теоретическая физика: Учеб. пособие в 10-ти т. Т. 1. Механика, 4-е изд., испр. М.: Наука. 1988. 216 с.
11. Бачкало Б.И., Бондарев В.Г. Результаты моделирования уходов вибрационного гироскопа, обусловленных упругой податливостью элементов его конструкции: Научно-методические материалы по авиационному оборудованию. Рига: РВВАИУ им. Я. Алксниса, 1986. Вып. № 9. С. 53–56.

REFERENCES

1. Raspopov V.Ya. Mikromechanicheskie pribory: uchebnoe posobie. M.: Mashinostroenie, 2007. 400 p.
2. Matveev V.V., Seregin S.I. Matematicheskie modeli mikromechanicheskikh giroskopov LL-tipa // Izvestiya TulGU. Tehnicheskie nauki. 2012. Vyp. 12. Ch.1. Pp. 205–213.
3. Babrin E.S., Baranov P.F. Modelirovanie konstrukcionnyh i dinamicheskikh harakteristik dvuhkomponentnogo mikromechanicheskogo giroskopa // Vestnik nauki Sibiri. 2013. № 1 (7). Pp. 96–105.
4. Nekrasov Ya.A. Metody povysheniya tochnosti s`ema informacii v mikromechanicheskikh giroskopah: dis. ... kand. tehn. nauk. Sankt-Peterburg, 2007. 125 p.
5. Ponomarev Yu.A. Dvuhkoordinatnyj kompensacionnyj mikromechanicheskij giroskop: dis. ... kand. tehn. nauk. Moskva, 2013. 265 p.
6. Moiseev N.V. Mikromechanicheskij giroskop kompensacionnogo tipa s rasshirenym diapazonom izmereniya: dis. ... kand. teh. nauk. Sankt-Peterburg, 2015. 123 p.
7. Barulina M.A. Temperaturnye i tehnologicheskie pogreshnosti mikromechanicheskikh giroskopov: dis. ... kand. tehn. nauk. Saratov, 2004. 171 p.
8. Barulina M.A., Dzhashitov V.E. Matematicheskaya model' kamertonnogo mikromechanicheskogo giroskopa // Mehanika deformiruemyyh sred. 2004. № 15. Pp. 43–49.
9. Bachkalo B.I. Uravneniya dvizheniya girostabilizirovannoj platformy s uchetoм uprugoj podatlivosti ee `elementov // Avtomatika i vychislitel'naya tehnika. 1966. Vyp. 12. Pp. 47–56.
10. Landau L.D. Teoreticheskaya fizika: Ucheb. posobie v 10-ti t. T. 1. Mehanika, 4-e izd., ispr. M.: Nauka. 1988. 216 p.
11. Bachkalo B.I., Bondarev V.G. Rezul'taty modelirovaniya uhodov vibracionnogo giroskopa, obuslovlennyh uprugoj podatlivost'yu `elementov ego konstrukcii: Nauchno-metodicheskie materialy po aviacionnomu oborudovaniyu. Riga: RVVAIU im. Ya. Alksnisa, 1986. Vyp. № 9. Pp. 53–56.

© Кириллов В.С., 2019

Кириллов Владислав Сергеевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник 31 отдела научно-исследовательского научно-исследовательского центра (проблем применения, обеспечения и управления авиацией Военно-воздушных сил), Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А, vkirillow@mail.ru.