УДК 517.977.56
ГРНТИ 27.31.15

УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ МАЧТОВЫХ АНТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В.В. ПРОВОТОРОВ, доктор физико-математических наук, доцент
ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)
А.П. ЖАБКО, доктор физико-математических наук, профессор
Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург)

Работа посвящена задаче управления антенной системой типа «мачта-растяжки», а именно, гашению несанкционированных колебаний конструкции (успокоению конструкции), инициированных внешними воздействиями. Формируется математическая модель процесса колебаний и решение поставленной задачи (имеется ввиду численная реализация задачи успокоения антенной конструкции). Осуществляется замена континуальной задачи для системы дифференциальных уравнений конечной («усеченной») системой алгебраических уравнений. Разрешимость такой системы представлена в терминах необходимых и достаточных условий для использования метода моментов. Таким образом, решение «усеченной» системы можно рассматривать как приближенное решение исходной континуальной задачи гашения колебаний с наперед заданной точностью. Представленный подход может использоваться в задачах оптимального управления, определения условий осцилляции и стабилизации и задачи сетевой экономики.

Ключевые слова: эволюционные системы, начально-краевые задачи, гиперболическое уравнение, распределенные параметры на графе, граничное управление, метод моментов.

ANTENNA MAST STRUCTURES OSCILLATION CONTROL

V.V. PROVOTOROV, Doctor Physico-mathematical Sciences, Assistant Professor
MESC AF «N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy» (Voronezh)
A.P. ZHABKO, Doctor Physico-mathematical Sciences, Professor
St. Petersburg State University (St. Petersburg)

The work is devoted to the task of controlling the antenna system of the type «mast-stretching», namely, to quench unauthorized vibrations of the structure (to calm the structure) initiated by external influences. A mathematical model of the oscillation process and the solution of the problem (for the numerical implementation of the problem of calming the antenna structure) is being formed. The continual problem for the system of differential equations is replaced by a finite («truncated») system of algebraic equations. The solvability of such a system is presented in terms of the necessary and sufficient conditions for using the method of moments. Thus, the solution of the «truncated» system can be considered as an approximate solution of the initial continual problem of damping oscillations with a predetermined accuracy. The presented approach can be used in problems of optimal control, determination of conditions for oscillation and stabilization, and tasks of the network economy.

Keywords: evolutionary systems, initial-boundary value problems, hyperbolic equation, distributed parameters on a graph, boundary control, method of moments.

Введение. Исследование, представленное в работе, посвящено часто встречающейся в прикладных вопросах теории сплошных сред задаче перевода сложносочлененной промышленной конструкции, состоящей из системы упругих фрагментов, из фиксированного состояния в состояние покоя – задача успокоения нежелательных колебаний промышленной конструкции. В качестве сложносочлененной конструкции рассматриваются мачтовые антенные конструкции, управляющие воздействия на конструкцию осуществляются в местах закрепления антенных растяжек (граничное управление системой). Представлена математическая модель малых упругих поперечных колебаний конструкции, которая описывается системой волновых уравнений с распределенными параметрами на геометрическом графе. Работа разбита на две части: 1) представлена математическая модель, описывающая колебания антенной конструкции, где тело мачты имеет систему крепежных растяжек, зафиксированных в одной точке мачты – односекционная антенна и 2) математическая модель двухсекционной антенны с несколькими системами крепежных растяжек, зафиксированных в различных точках тела мачты, число таких точек равно $L \geq 2$. В обоих случаях фрагмент мачтовой конструкции, находящийся выше места закрепления (или всех мест закрепления) растяжек интерпретируется в виде сосредоточенной массы (точечной массы) M; фрагмент мачтовой конструкции, находящийся ниже всех мест закрепления растяжек, испытывает только продольные малые колебания [1]. Используемые для исследования антенные конструкции относятся к числу так называемых конструкций типа «мачта-растяжки». В качестве естественного инструмента математического описания рассматриваемых антенных конструкций используется ограниченный связный граф типа цепочки графов-звезд с фиксированным числом ребер у каждой звезды, в качестве математической модели, описывающей волновой процесс – начально-краевая задача для уравнения с частными производными гиперболического типа с распределенными параметрами на графе с обобщенными условиями Кирхгофа в местах сопряжения звезд. Следует отметить, что для исследуемого процесса становятся важными вопросы устойчивости и стабилизации получаемых решений [2–4].

Актуальность. Рассматривается актуальная в теории упругости задача о гашении колебаний сложносочлененной конструкции, состоящей из упругих линейных фрагментов, к таковым относятся мачтовые антенны различного типа, функционирующие в экстремальных условиях. Колебания конструкции инициируются внешними воздействиями, математический формализм которых описывается классом суммируемых функций с нетривиальным носителем на конечном связном ограниченном графе. Строится математическая модель мачтовой антенны с одним и несколькими местами креплений удерживающих растяжек. Используются формализмы эволюционных уравнений математической физики гиперболического типа с пространственной переменной, изменяющейся на графе [1].

Теоретической базой исследования являются методы теории оптимального управления. Указаны исчерпывающие условия применимости классического метода моментов для решения актуальной прикладной задачи: гашение нежелательных (и даже опасных) колебаний конструкции в результате воздействий сторонних (несанкционированных) внешних сил. Такие колебания гасятся с помощью специально рассчитанных внешних управляющих динамических воздействий, приложенных в наиболее доступных точках конструкции, в терминах математической модели таковыми являются граничные точки упругой системы. Представленный подход допускает анализ другой актуальной задачи, когда влияние на упругую систему осуществляется с временным запаздыванием, при этом используются уравнения с отклоняющимся (запаздывающим) временным аргументом. Это направление в данном исследовании не обсуждается и является темой специального анализа, частично проведенного в работах [2–4].

1. Односекционная антенная конструкция. Введем в рассмотрение геометрический связный граф-звезда Γ с одним узлом ξ и примыкающими к нему m ребрами $\gamma_k\,(k=\overline{1,m})$. Для класса функций с носителем на графе определим параметризацию и установим ориентацию на каждом ребре Γ: параметризация и ориентация на ребрах $\gamma_k\,(k=\overline{1,m-1})$ осуществляется отрезком $[0,\ell/2]$, а на ребре γ_m – соответственно отрезком $[\ell/2,\ell]$.

Обозначим через $U(x,t)$, $x,t \in \Gamma \times [0,T]$ функцию, определяющую достаточно малые отклонения малых (точечных) элементов мачтовых конструкций (линейных и узловых фрагментов) от исходного состояния. Функция $U(x,t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(x,t)_{\gamma_k} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,t)_{\gamma_k} - q(x)_{\gamma_k}U(x,t)_{\gamma_k}, \quad x,t \in \Gamma_0 \times (0,T), \tag{1}$$

($U(x,t)_{\gamma_k}$ – сужение функции $U(x,t)$ на ребро γ_k, $k=\overline{1,m}$; Γ_0 – совокупность всех ребер графа Γ, не содержащих концевых точек), а также условиями сопряжения (условиями согласования):

$$\frac{\partial}{\partial x}U(\frac{\ell}{2},t)_{\gamma_m} - \sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial}{\partial x}U(\frac{\ell}{2},t)_{\gamma_k} = -M\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(\frac{\ell}{2},t)_{\gamma_m} \tag{2}$$

в узле ξ, несущем сосредоточенную массу M (фрагмент тела мачты, находящийся выше узла ξ заменен массой M). Функции $q(x)_{\gamma_1} = q(x)_{\gamma_2} = ... = q(x)_{\gamma_{m-1}}$ – рассматривается достаточно часто встречающаяся на практике ситуация идентичности растяжек мачты [1, 5]; упругие характеристики фрагмента мачты, находящиеся выше узла ξ креплений растяжек мачты определяются функцией $q(x)_{\gamma_m}$, символ f_γ означает сужение функции f на ребро γ. При этом остаются понятия и обозначения, используемые в работах [1, 5].

Присоединяя к соотношениям (1), (2) начальные:

$$U(x,0) = \varphi(x) \tag{3}$$

и граничные:

$$U(x,t) = \psi(t), \quad x \in \partial\Gamma \tag{4}$$

условия ($\partial\Gamma$ – множество граничных узлов графа Γ). Начально-краевая задача (1) – (4) определяет математическую модель процесса колебаний мачтовой системы.

Управление колебаниями (гашение колебаний) системы (1)–(4) состоит в отыскании управляющих функций $\theta_k(t)$ (управлений) таких, что в момент времени $t=T$ имело место $U(x,T)=0,\ \frac{\partial}{\partial t}U(x,T)=0$, то есть мачтовая конструкция примет состояние динамического покоя.

Как хорошо известно, применяя метод разделяющих переменных (метод Фурье) к (1)–(4) [6], получаем спектральную задачу (задачу Штурма-Лиувилля) на графе-звезде Γ. В работе [6] содержится обоснование метода разделяющих переменных для эволюционных уравнений с частными производными 2-го порядка с распределенными параметрами на графе.

Задача Штурма-Лиувилля в пространстве $C(\Gamma) \cap C^2[\Gamma]$ представляет собой совокупность уравнений:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in \gamma_k \ (k=\overline{1,m}), \tag{5}$$

во внутренней части каждого ребра γ_k $(k=\overline{1,m})$, при этом функция $y(x,\lambda)$ удовлетворяет условиям согласования:

$$-y'(\ell/2)_{\gamma_m} + \sum_{k=1}^{m-1} y'(\ell/2)_{\gamma_k} + M(q(\ell/2)_{\gamma_m} - \lambda) y(\ell/2)_{\gamma_m} = 0 \tag{6}$$

во внутреннем узле ξ и однородным условиям в граничных узлах:

$$y(0)_{\gamma_k} = 0 \ \ (k = \overline{1, m-1}), \quad y(\ell)_{\gamma_m} = 0, \tag{7}$$

где λ – спектральный параметр, $q(x) \in C[\Gamma]$. Уравнением на звезде Γ, как и выше, называется совокупность уравнений (5), (6), краевая задача на Γ определяется соотношениями (5) – (7).

Рассмотрим вспомогательное уравнение:

$$-z'' + Q(x)z = \lambda z, \quad x \in (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi), \tag{8}$$

где искомая функция $z'(x)$ допускает разрыв:

$$-(z'(\pi/2+0) - z'(\pi/2-0)) + M(Q(\pi/2) - \lambda) z(\pi/2) = 0, \tag{9}$$

пропорциональный значению $z(\pi/2)$; здесь:

$$Q(x) = q(x), \ \ x \in [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi] = (\gamma_1 \cup \gamma_m) \setminus \{\xi\}, \ \ Q(\pi/2) = q(\pi/2)_{\gamma_m}.$$

Систему соотношений (8), (9) назовем дифференциальным уравнением на интервале $(0, \pi)$, а функцию $z(x)$ класса $C[0, \pi] \cap C^1([0, \pi] \setminus \{\pi/2\}) \cap C^2((0, \pi) \setminus \{\pi/2\})$, удовлетворяющую системе (8), (9), назовем решением системы (8), (9).

Теорема 1. Пусть z_0, z_0' – произвольные действительные числа. Система (8), (9) имеет единственное решение $z(x, \lambda)$ класса $C[0, \pi] \cap C^1([0, \pi] \setminus \{\pi/2\}) \cap C^2((0, \pi) \setminus \{\pi/2\})$, удовлетворяющее начальным условиям $z(0, \lambda) = z_0$, $z'(0, \lambda) = z_0'$ (либо условиям $z(\pi/2, \lambda) = z_0$, $z'(\pi/2-0, \lambda) = z_0'$). Это решение для каждого x из отрезка $[0, \pi]$ является целой аналитической функцией параметра λ. Многообразие решений системы (8), (9) имеет размерность два.

Для уравнения (8) введем два линейно независимых решения $\mu(x, \lambda)$ и $\eta(x, \lambda)$ класса $C[0, \pi] \cap C^1([0, \pi] \setminus \{\pi/2\}) \cap C^2((0, \pi) \setminus \{\pi/2\})$, которые удовлетворяют начальным условиям:

$$\mu(\ell/2-0, \lambda) = 1, \ \ \mu'(\ell/2-0, \lambda) = 0,$$

$$\eta(\ell/2-0, \lambda) = 0, \ \ \eta'(\ell/2-0, \lambda) = 1.$$

Из непрерывности функций $\mu(x, \lambda)$, $\eta(x, \lambda)$ и из соотношения (9) вытекают следующие соотношения:

$$\mu(\ell/2, \lambda) = \mu(\ell/2+0, \lambda) = 1, \quad \mu'(\ell/2+0, \lambda) = -M(\lambda - Q(\ell/2)),$$

$$\eta(\ell/2, \lambda) = \eta(\ell/2+0, \lambda) = 0, \quad \eta'(\pi/2+0, \lambda) = 1.$$

Заметим, что функции:

СОДЕРЖАНИЕ

$$\underset{(k=\overline{1,m-1})}{\omega_k(x,\lambda)}=\begin{cases}\delta_{ik}\eta(x,\lambda), & \underset{(i=\overline{1,m-1})}{x\in\gamma,}\\ \eta(x,\lambda), & x\in\gamma_m,\end{cases}$$

$$\omega_m(x,\lambda)=\mu(x,\lambda),\quad x\in\Gamma,$$

($\delta_{ik}=\begin{cases}1, & i=k,\\ 0, & i\neq k,\end{cases}$) линейно независимы и, очевидно, образуют фундаментальную систему решений уравнения (5), удовлетворяющую условиям согласования (6). Предположим, что функции $u(x,\lambda),\ v(x,\lambda)\ \ C[0,\pi]\cap C^1([0,\pi]\setminus\{\pi/2\})\cap C^2((0,\pi)\setminus\{\pi/2\})$ с начальными условиями:

$$u(0,\lambda)=1,\ u'(0,\lambda)=0,$$

$$v(\ell,\lambda)=1,\ v'(\ell,\lambda)=0,$$

являются также решениями уравнения (5), удовлетворяющих условиям согласования (6). В соответствии с утверждением теоремы 1 для каждого фиксированного действительного числа λ решения $u(x,\lambda),v(x,\lambda)$ являются целыми аналитическими по λ функциями. Рассмотрим систему функций $\{\theta_k(x,\lambda)\}_{k=1}^m$ вида:

$$\theta_k(x,\lambda)=u'(\ell/2-0,\lambda)(\omega_1(x,\lambda)-\omega_k(x,\lambda)),\quad k=\overline{2,m-1},$$

$$\theta_m(x,\lambda)=\frac{1}{m-1}v'(\ell/2-0,\lambda)\sum_{k=1}^{m-1}\omega_k(x,\lambda)+v(\ell/2,\lambda)\omega_m(x,\lambda),$$

$$\theta_m(x,\lambda)=\frac{1}{m-1}v'(\ell/2-0,\lambda)\sum_{k=1}^{m-1}\omega_k(x,\lambda)+v(\ell/2,\lambda)\omega_m(x,\lambda),$$

явное представление которых определено соотношениями:

$$\theta_1(x,\lambda)=\begin{cases}u(x,\lambda),\ x\in\gamma_i,\ i=1,2,\ldots,m-1,\\ (m-1)u'(\pi/2-0,\lambda)\eta(x,\lambda)+u(\pi/2,\lambda)\mu(x,\lambda), x\in\gamma_m,\end{cases}$$

$$\underset{(k=\overline{2,m-1})}{\theta_k(x,\lambda)}=\begin{cases}u'(\pi/2-0,\lambda)\eta(x,\lambda),\quad x\in\gamma_1,\\ -\delta_{ki}u'(\pi/2-0,\lambda)\eta(x,\lambda),\ x\in\gamma_i,\ i=2,3,\ldots,m,\end{cases}\tag{10}$$

$$\theta_m(x,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{v'(\pi/2-0,\lambda)}{m-1}\eta(x,\lambda)+v(\pi/2,\lambda)\mu(x,\lambda),\ x\in\gamma_i,\ i=1,2,\ldots,m-1,\\ v(x,\lambda),\ x\in\gamma_m.\end{cases}$$

Нетрудно показать, что функции $\theta_k(x,\lambda)\ (k=\overline{1,m})$ являются решениями уравнения (5), (6) и удовлетворяют краевым условиям:

$$\theta_1(0,\lambda)_{\gamma_1}=0,\quad \theta_k(\pi,\lambda)_{\gamma_k}=0\ \ (k=\overline{2,m}).$$

Систему линейно независимых функций $\{\theta_k(x,\lambda)\}_1^m$ назовем фундаментальной системой решений уравнения (5), (6). Множество решений уравнения (5), (6) образует m-мерное линейное многообразие, то есть произвольное решение уравнения (5), (6) является линейной комбинацией функций (10), принадлежащих системе $\{\theta_k(x,\lambda)\}_1^m$. Многообразие $\{\theta_k(x,\lambda)\}_1^m$ используется для построения системы собственных функций спектральной задачи (5)–(7).

Теорема 2. Краевая задача (5)–(7) имеет только дискретный спектр, его элементы – вещественные числа. Собственные функции задачи (5)–(7) вещественные. При этом, собственные функции, соответствующие отличным друг от друга собственным значениям, ортогональны в $L^2(\Gamma)$.

Доказательство указанных в условии теоремы спектральных свойств собственных значений и собственных функций почти полностью повторяет рассуждения классической теоремы на отрезке.

Обозначим через Δ следующее выражение:

$$\begin{gathered}\Delta=(m-1)u'(\pi/2-0,\lambda)v(\pi/2,\lambda)-u(\pi/2,\lambda)v'(\pi/2-0,\lambda)=\\=(m-1)u'(\pi/2-0,\lambda)v(\pi/2,\lambda)-u(\pi/2,\lambda)v'(\pi/2+0,\lambda)-\\-M(\lambda-Q(\pi/2))u(\pi/2,\lambda)v(\pi/2,\lambda),\end{gathered}$$

и пусть Ω – спектр краевой задачи (5)–(7), т.е. множество собственных значений, через Ω', Ω'', Ω''' обозначим совокупности вида:

$$\Omega'=\{\lambda:D(\lambda)=0,u(\pi/2,\lambda)\neq 0\},$$

$$\Omega''=\{\lambda:D(\lambda)=0,u(\pi/2,\lambda)=0\},$$

$$\Omega'''=\{\lambda:D(\lambda)\neq 0,u(\pi/2,\lambda)=0\}.$$

Теорема 3. *Множества Ω', Ω'', Ω''' собственных значений λ, попарно не пересекаются и $\Omega=\Omega'\cup\Omega''\cup\Omega'''$, для любого λ справедливы утверждения:*

1) *пусть $\lambda=\lambda'\in\Omega'$, тогда λ' простое,*

2) *пусть $\lambda=\lambda''\in\Omega''$, тогда λ'' имеет кратность, равную $m-1$,*

3) *пусть $\lambda=\lambda'''\in\Omega'''$, тогда λ''' имеет кратность, равную $m-2$.*

Доказательство теоремы 3 представлено в [6].

Замечание. Из утверждений теоремы 3 следует представление собственных функций задачи (5)–(7):

1) пусть $\lambda'\in\Omega'$, тогда ему соответствует собственная функция $\theta_1(x,\lambda')$;

2) пусть $\lambda''\in\Omega''$, тогда ему соответствуют $m-1$ собственных функций $\theta_k(x,\lambda'')$ $(k=\overline{1,m-1})$:

$$\chi_1(x,\lambda'') = \theta_1(x,\lambda''),$$

$$\chi_2(x,\lambda'') = \theta_2(x,\lambda''),$$

$$\chi_k(x,\lambda'') = -\sum_{i=2}^{k-1}\frac{1}{i}\chi_i(x,\lambda'') + \theta_k(x,\lambda''), \quad k = \overline{3,m-1};$$

3) пусть $\lambda''' \in \Omega'''$, тогда ему соответствуют $m-2$ собственные функции $\chi_k(x,\lambda''')$, $k = \overline{2,m-1}$ ($\chi_k(x,\lambda_n''')$ совпадают с $\theta_k(x,\lambda'')$, если $\lambda_n''' = \lambda''$ $(k = \overline{2,m-1})$).

Очевидно, что, используя процесс ортогонализации Сонина-Шмидта для функций $\theta_k(x,\lambda'')$, можно считать все собственные функции взаимно ортогональными.

Нетрудно проверить, что при условии непрерывности на каждом ребре функции $q(x)$ (т.е. условии выполнения $q(x) \in C[\Gamma]$), дифференциальный оператор, порожденный краевой задачей (5) – (7), положительно определен, а значит, положительным является его спектр, т.е. являются положительными все собственные значения и на бесконечности находится их точка сгущения.

Расположим все собственные значения краевой задачи (5)–(7) в порядке возрастания и с учетом их кратностей:

$$0 < \lambda_0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n \le \ldots$$

(заметим, что в приведенной цепочке неравенств число λ_k присутствует ровно столько раз, какова его кратность – см. утверждение теоремы 3). В связи с этим, собственные функции нумеруются также, как нумеруются им соответствующие собственные значения $X_n(x)$ (для одинаковых собственных значений им соответствующие собственные функции берутся в произвольном порядке (см. замечание к теореме 3)).

Обоснованием использования метода Фурье (метода разделения переменных) для начально-краевой задачи (1)–(4) являются приводимые ниже утверждения (полные доказательства см. в работах [5, 6]).

Теорема 4. Множество $\{X_n(x)\}_{n\ge 0}$ обладает свойством спектральной полноты в пространстве $L^2(\Gamma)$, то есть $L^2(\Gamma)$ является сепарабельным пространством с ортонормированным базисом $\{X_n(x)\}_{n\ge 0}$.

Теорема 5. Любая абсолютно непрерывная функция $f(x)$, $x \in \Gamma$ разлагается в обобщенный ряд Фурье по системе $\{X_n(x)\}_{n\ge 0}$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X_n(x),$$
$$a_n = \frac{1}{\omega_n}\int_{\Gamma} f(t) X_n(t)\,dt, \quad \omega_n = \sqrt{\int_{\Gamma} X_n^2(t)\,dt}, \tag{11}$$

сходимость ряда (11) равномерная относительно $x \in \Gamma$.

Ниже представлен анализ математической модели колебательного процесса антенной конструкции, описываемой начально-краевой задачей (1)–(4). Пусть достаточно гладкая функция $U(x,t)$ является решением задачи (1)–(4) и ее разложение в обобщенный ряд Фурье имеет вид:

$$U(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)X_n(x),\quad u_n(t)=\int_{\Gamma}U(x,t)X_n(x)dx,$$

здесь базисные функции $X_n(x)$ определяются системой функций $\{\theta_k(x,\lambda)\}_1^m$ (см. представления (10)). Дважды продифференцируем функцию $u_n(t)$ и, используя уравнение (1), (2), получаем дифференциальное уравнение 2-го порядка для коэффициентов $u_n(t)$:

$$u_n''(t)+\rho_n^2u_n(t)=z_n(t),\quad t>0,\ \lambda_n=\rho_n^2, \tag{12}$$

где $z_n(t)=-\sum_{k=1}^{m-1}\mu_k(t)X_n'(0)_{\gamma_k}+\nu(t)X_n'(\ell)_{\gamma_m}$. Решение уравнения (12) для произвольного n, учитывая начальные условия при $t=0$, определяются соотношениями:

$$u_n(t)=\varphi_n\cos\rho_nt+\frac{\psi_n}{\rho_n}\sin\rho_nt+\frac{1}{\rho_n}\int_0^t z_n(\tau)\sin\rho_n(t-\tau)d\tau, \tag{13}$$

через φ_n, ψ_n обозначены обобщенные коэффициенты Фурье начальной и граничной функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, разложенных по базису $\{X_n(x)\}_{n\ge0}$: $\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_nX_n(x)$, $\psi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_nX_n(x)$. Значит, решение $U(x,t)$ начально-краевой задачи (1)–(4) вместе с производной $\frac{\partial U}{\partial t}(x,t)$ имеют представление в виде рядов:

$$U(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}[\varphi_n\cos\rho_nt+\frac{\psi_{kn}}{\rho_n}\sin\rho_nt]X_n(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{X_n(x)}{\rho_n}\int_0^t z_n(\tau)\sin\rho_n(t-\tau)d\tau, \tag{14}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}[-\rho_n\varphi_n\sin\lambda_nt+\psi_n\cos\rho_nt]X_n(x)+\sum_{n=0}^{\infty}X_n(x)\int_0^t z_n(\tau)\cos\rho_n(t-\tau)d\tau. \tag{15}$$

Динамический покой системы (1), (2) (т.е. $U(x,t)=\frac{\partial U}{\partial t}(x,t)=0$, $x,t\in\Gamma\times[0,T]$), определяется совокупностью уравнений:

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{\infty}[\varphi_n\cos\rho_nt+\frac{\psi_n}{\rho_n}\sin\rho_nt]X_n(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{X_n(x)}{\rho_n}\int_0^t z_n(\tau)\sin\rho_n(t-\tau)d\tau=0,\\ \sum_{n=0}^{\infty}[-\rho_n\varphi_n\sin\rho_nt+\psi_n\cos\rho_nt]X_n(x)+\sum_{n=0}^{\infty}X_n(x)\int_0^t z_n(\tau)\cos\rho_n(t-\tau)d\tau=0,\end{gathered} \tag{16}$$

которая определяет совокупность условий на коэффициенты φ_n, ψ_n – условия гашения колебаний в системе (1), (2) для произвольного временного момента t. Соотношения (16), а значит, и систему (1), (2), удобно рассматривать в фиксированный момент времени $t=T$. Сравнивая коэффициенты при функциях $X_n(x)$ системы $\{X_n(x)\}_{n\ge0}$, получаем совокупность соотношений ($n=0,1,2,...$):

$$-\varphi_n \cos\rho_n T - \frac{\psi_n}{\rho_n}\sin\rho_n T = \frac{1}{\rho_n}\int_0^T [\sum_{k=1}^{m-1}\mu_k(\tau)X_n'(0)_{\gamma_k} - \nu(\tau)X_n'(\ell)]\sin\rho_n(T-\tau)d\tau,$$
$$a\rho_n\varphi_n \sin\rho_n T - \psi_n\cos\rho_n T = \int_0^T [\sum_{k=1}^{m-1}\mu_k(\tau)X_n'(0)_{\gamma_k} - \nu(\tau)X_n'(\ell)]\cos\rho_n(T-\tau)d\tau. \qquad (17)$$

Рассматривая это как систему соотношений относительно выражений:

$$\int_0^T [\sum_{k=1}^{m-1}\mu_k(\tau)X_n'(0)_{\gamma_k} - \nu(\tau)X_n'(\ell)]\cos\rho_n\tau)d\tau$$

и

$$\int_0^T [\sum_{k=1}^{m-1}\mu_k(\tau)X_n'(0)_{\gamma_k} - \nu(\tau)X_n'(\ell)]\sin\rho_n\tau)d\tau$$

($n = 0,1,2,...$) и разрешая ее (определитель при этом равен единице!), приходим к новой системе соотношений ($n = 0,1,2,...$):

$$\sum_{k=1}^{m-1}X_n'(0)_{\gamma_k}\int_0^T \mu_k(\tau)\cos\lambda_n\tau d\tau - X_n'(\ell)\int_0^T \nu(\tau)\cos\lambda_n\tau d\tau = -\psi_n,$$
$$\sin\rho_n T\sum_{k=1}^{m-1}X_n'(0)_{\gamma_k}\int_0^T \mu_k(\tau) - X_n'(\ell)\int_0^T \nu(\tau)\sin\rho_n\tau d\tau = \rho_n\varphi_n. \qquad (18)$$

Таким образом, получена удобная для практической реализации система уравнений (18) относительно так называемых моментов функций $\mu_k(t)$ $(k=\overline{1,m-1})$, $\nu(t)$ (система моментных равенств), являющихся граничными управляющими воздействиями. И задача гашения колебаний системы (1)–(4) свелась к известной «$\ell-$проблеме моментов» (см. [4, 5]): граничные управляющие воздействия $\mu_k(t)$ $(k=\overline{1,m-1})$, $\nu(t)$ определяются решением системы (18) с любой, наперед заданной точностью, зависящей только от числа взятых номеров $n = 0,1,2,...$.

Замечание 1. Колебания антенных фрагментов можно погасить, используя в качестве управляющей функции только одно из граничных управляющих воздействий $\mu_k(x)$ $(k=\overline{1,m-1})$, например, $\mu_1(x)$ (остальные фиксированы). Моментная система для этой функции аналогична системе (18).

Замечание 2. Сетеподобные антенные конструкции, представляют собой набор звезд типа Γ с общими ребрами **(**разумеется, масса в узлах крепления растяжек исключается). При этом, возникают так называемые циклы (петли) [1] – подграфы, содержащие замкнутые контуры, состоящие из последовательно связных между собой ребер (начало реберного контура совпадает с его концом). Анализ колебаний такой сетеподобной антенной конструкции аналогичен приведенному выше.

2. L-уровневая антенная конструкция. Для упругой L-уровневой антенной конструкции ниже рассматривается аналогичная задача гашения колебаний. Математическая модель малых поперечных колебаний использует формализмы краевых задач для эволюционных уравнений с частными производными гиперболического типа, пространственная переменная которых изменяется на множестве, представляющем собой ориентированный граф-цепочку (обозначим его через $\Im$). Такой граф структурирован L последовательно соединенными между собой графами-звезда Γ_ℓ ($\ell=\overline{1,L}$): $\Im=\bigcup_{\ell=1}^{L}\Gamma_\ell$. Ребра γ_k^ℓ ($k=\overline{1,m_\ell}$, $\ell=\overline{1,L}$), а также узлы ξ_ℓ ($\ell=\overline{1,L}$), графа $\Im$ параметризованы и ориентированы по аналогии с параметризацией и ориентацией графа-звезды Γ раздела 1.

Обозначим через $\Omega(x,t)$, $x,t\in\Im\times[0,T]$ достаточно гладкую функцию, которая описывает амплитудные изменения малых перемещений достаточно малых фрагментов антенной конструкции при произвольном значении пространственной переменной x и временной переменной t (см. обозначения работы [1]). Математическая модель колебательного процесса в антенной конструкции описывается совокупностью уравнений:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Omega(x,t)_{\gamma_k^\ell}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Omega(x,t)_{\gamma_k^\ell}-q(x)_{\gamma_k^\ell}\Omega(x,t)_{\gamma_k^\ell} \tag{19}$$

на каждом ребре γ_k^ℓ $(k=\overline{1,m_\ell},\ \ell=\overline{1,L})$, соотношениями (условиями трансверсальности):

$$\begin{gathered}\Omega(\frac{\pi}{2},t)_{\gamma_k^\ell}=\Omega(\frac{\pi}{2},t)_{\gamma_{m_\ell}^\ell},\quad k=\overline{1,m_\ell-1},\\ \frac{\partial\Omega}{\partial x}(\ell\frac{\pi}{2},t)_{\gamma_{m_{\ell-1}}^{\ell-1}}+\sum_{k=1}^{m_\ell-1}\frac{\partial\Omega}{\partial x}(\ell\frac{\pi}{2},t)_{\gamma_k^\ell}=\frac{\partial\Omega}{\partial x}(\ell\frac{\pi}{2},t)_{\gamma_{m_\ell}^\ell}\end{gathered} \tag{20}$$

в узлах ξ_ℓ, $\ell=\overline{2,L}$ и соотношениями:

$$\begin{gathered}\Omega(\frac{\pi}{2},t)_{\gamma_k^1}=\Omega(\frac{\pi}{2},t)_{\gamma_{m_k}^1},\quad k=\overline{1,m_1-1},\\ \frac{\partial\Omega}{\partial x}(\frac{\pi}{2},t)_{\gamma_{m_1}^1}-\sum_{k=1}^{m_1-1}\frac{\partial\Omega}{\partial x}(\frac{\pi}{2},t)_{\gamma_{m_k}^1}-Mq(\frac{\pi}{2})_{\gamma_{m_k}^1}\Omega(\frac{\pi}{2},t)_{\gamma_{m_1}^1}=M\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2}(\frac{\pi}{2},t)_{\gamma_{m_1}^1}\end{gathered} \tag{21}$$

в узле ξ_1, несущему сосредоточенную массу M (количественная характеристика оконечности антенны). При этом имеют место начальные условия (начальное состояние антенны):

$$\Omega(x,0)=\tau(x),\quad \frac{\partial}{\partial t}\Omega(x,0)=\bar{\tau}(x), \tag{22}$$

при $x\in\Im$, $t=0$ и граничные условия:

$$\Omega((\ell-1)\pi/2,t)_{\gamma_{m_\ell}^\ell}=\mu_k^\ell(t)\ \ (k=\overline{1,m_\ell-1},\ \ell=\overline{1,L}),\quad \Omega((L+1)\pi/2,t)_{\gamma_{m_L}^L}=\nu(t), \tag{23}$$

в граничных узлах цепочки $\Im$ ($t\in[0,T]$). Отметим, что возможны и иные граничные условия, определяемые конструкцией крепежа растяжек.

Спектральная задача (задача Штурма-Лиувилля) на цепочке $\Im$ для функций класса $C(\Im)\cap C^2[\Im]$ определяется совокупностью уравнений:

$$-y''_{\gamma_k^\ell}+q(x)_{\gamma_k^\ell}\,y_{\gamma_k^\ell}=\lambda y_{\gamma_k^\ell}\quad (k=\overline{1,m_\ell},\ \ell=\overline{1,L}),\tag{24}$$

на внутренних частях ребер γ_k^ℓ при выбранной параметризации ($\lambda-$ спектральный параметр), соотношениями:

$$y'(\ell\pi/2)_{\gamma_{m_{\ell-1}}^{\ell-1}}+\sum_{k=1}^{m_\ell-1}y'(\ell\pi/2)_{\gamma_{m_k}^\ell}=y'(\ell\pi/2)_{\gamma_{m_\ell}^\ell},\tag{25}$$

в узлах ξ_ℓ, $\ell=\overline{2,L}$ каждой звезды $\Gamma_\ell\ (\ell=\overline{2,L})$, соотношением:

$$\sum_{k=1}^{m_1-1}y'(\pi/2)_{\gamma_k^1}+M(q(\pi/2)_{\gamma_{m_1}^1}-\lambda)y(\pi/2)_{\gamma_{m_1}^1}=y'(\pi/2)_{\gamma_{m_1}^1}\tag{26}$$

в узле ξ_1 звезды Γ_1 и краевыми условиями:

$$y((\ell-1)\pi/2)_{\gamma_k^\ell}=0,\ \ k=\overline{1,m_\ell-1},\ \ \ell=\overline{2,L},\quad y((L+1)\pi/2)_{\gamma_{m_L}^L}=0.\tag{27}$$

Заметим, что априори задаваемое семейство функций $\mu_k^\ell(t)\ (k=\overline{1,m_\ell-1},\ \ell=\overline{1,L})$, фигурирующих в формализмах (23) граничных условий, представляет множество управлений изучаемой системы (19) – (23), состояние которой является функцией $\Omega(x,t)$, $x,t\in\Im\times[0,T]$ класса $C^2(\Im\times[0,T])$.

Введем следующие ограничения:

$$\max_{t\in[0,T]}|\mu_k^\ell(t)|\le C\quad (k=\overline{1,m_\ell-1},\ \ell=\overline{1,L}),\tag{28}$$

где $C>0$ – фиксированная постоянная.

Задача гашения колебаний L***-уровневневой антенной конструкции*****,** т.е. дифференциальной системы (19) – (23) состоит в определении управляющих воздействий $\mu_k^\ell(t)\ \ (k=\overline{1,m_\ell-1},\ \ \ell=\overline{1,L})$, удовлетворяющих ограничениям (28) и таких, чтобы условия:

$$\Omega(x,T)=0,\quad \frac{\partial}{\partial t}\Omega(x,T)=0,\tag{29}$$

(условия успокоения системы (19) – (23)) выполнялись при минимальном значении временной переменной, т.е. минимальном значении T.

Таким образом, учитывая начальные распределения (22) амплитуд и скоростей изменения параметров колебаний, необходимо через минимальное время T привести к динамическому покою все фрагменты антенной конструкции. Это означает равенство нулю как распределение амплитуд колебаний, так и скоростей изменения колебаний – эволюционная система (19)–(23) переведена из возбужденного состояния (22) в нулевое (29) или состояние покоя.

В рамках вышеприведенного метода моментных соотношений предлагается универсальный способ вычислительных операций, не зависящий ни от сложности и порядка системы дифференциальных уравнений, ни от числа функций, являющихся управляющими воздействиями. Этот метод, требующий только знание множества собственных функций системы (19)–(23), то есть множества $\{X_n(x)\}_{n\geq 1}$ собственных функций задачи Штурма-Лиувилля (24)–(27), является основополагающим в задаче гашения колебаний антенной системы произвольной мачтовой конструкции. При этом точность отыскания решения определяется только числом собственных функций.

Исходя из представления функции $\Omega(x,t)$, аналогичное функции $U(x,t)$ (раздел 1), и представления правых частей $z_n(t)$ для уравнения (12), условия (29) дают следующую совокупность соотношений ($n=1,2,...$):

$$-\tau_n \cos\rho_n T - \frac{\bar{\tau}_n}{\rho_n}\sin\rho_n T =$$

$$= \frac{1}{\rho_n}\int_0^T [-\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{k=1}^{m_\ell -1}\mu_k^\ell(\zeta)X_n((\ell-1)\pi/2)_{\gamma_k^\ell} + \nu(\zeta)X_n((L+1)\pi/2)_{\gamma_{m_L}^L}]\sin\rho_n(T-\zeta)d\zeta,$$

$$-\tau_n \cos\rho_n T - \frac{\bar{\tau}_n}{\rho_n}\sin\rho_n T =$$

$$= \frac{1}{\rho_n}\int_0^T [-\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{k=1}^{m_\ell -1}\mu_k^\ell(\zeta)X_n((\ell-1)\pi/2)_{\gamma_k^\ell} + \nu(\zeta)X_n((L+1)\pi/2)_{\gamma_{m_L}^L}]\sin\rho_n(T-\zeta)d\zeta.$$

Рассматривая эту систему (определитель ее для каждого фиксированного $n=0,1,2,...$ равен единице) относительно величин:

$$\int_0^T [-\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{k=1}^{m_\ell -1}\mu_k^\ell(\zeta)X_n((\ell-1)\pi/2)_{\gamma_k^\ell} + \nu(\zeta)X_n((L+1)\pi/2)_{\gamma_{m_L}^L}]\cos\rho_n\zeta d\zeta$$

и

$$\int_0^T [-\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{k=1}^{m_\ell -1}\mu_k^\ell(\zeta)X_n((\ell-1)\pi/2)_{\gamma_k^\ell} + \nu(\zeta)X_n((L+1)\pi/2)_{\gamma_{m_L}^L}]\sin\rho_n\zeta d\zeta,$$

получаем новую систему $(n=0,1,2,...)$ вида:

$$-\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{k=1}^{m_\ell -1}X_n((\ell-1)\pi/2)_{\gamma_k^\ell}\int_0^T\mu_k^\ell(\zeta)\cos\lambda_n\zeta d\zeta + X_n((L+1)\pi/2)_{\gamma_{m_L}^L}\int_0^T\nu(\zeta)\cos\lambda_n\zeta d\zeta = -\bar{\tau}_n,$$

$$-\sin\rho_n T\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{k=1}^{m_\ell -1}X_n((\ell-1)\pi/2)_{\gamma_k^\ell}\int_0^T\mu_k^\ell(\zeta)\sin\rho_n\zeta d\zeta + X_n((L+1)\pi/2)_{\gamma_{m_L}^L}\int_0^T\nu(\zeta)\sin\rho_n\zeta d\zeta = \rho_n\bar{\tau}_n$$

или

$$\sum_{k=1}^{m-1} X_n'(0)_{\gamma_k}\int_0^T \mu_k(\tau)\cos\lambda_n\tau d\tau - X_n'(\ell)\int_0^T \nu(\tau)\cos\lambda_n\tau d\tau = -\psi_n,$$

$$\sin\rho_n T\sum_{k=1}^{m-1} X_n'(0)_{\gamma_k}\int_0^T \mu_k(\tau) - X_n'(\ell)\int_0^T \nu(\tau)\sin\rho_n\tau d\tau = \rho_n\varphi_n.$$

Тем самым получена удобная (хотя и достаточно громоздкая) для компьютерной реализации аналогичная (17) моментная система уравнений для функции $\mu_k^{\ell}(t)$ $(k=\overline{1,m_{\ell}-1},\ \ell=\overline{1,L})$, $\nu(t)$, являющихся граничными управляющими функциями.

Выводы. Дальнейшее движение на пути получения решения поставленной задачи (имея ввиду численную реализацию задачи успокоения антенной конструкции) – замена полученной бесконечной системы алгебраических уравнений конечной («усеченной») системой (возникает конечная проблема моментов). Разрешимость такой системы представлена в терминах необходимых и достаточных условий в работе [7; § 2, гл. III]. Таким образом, решение «усеченной» системы можно рассматривать как приближенное решение исходной задачи гашения колебаний с наперед заданной точностью (см. задачи оптимального управления [8–12], задачи определения условий осцилляции и стабилизации [13–16] и задачи сетевой экономики [17–22]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Провоторов В.В. Моделирование колебательных процессов «мачта-растяжки» // Системы управления и информационные технологии. 2008. № 1 (31). С. 272–277.

2. Aleksandrov A.Y., Aleksandrova E.A., Zhabko A.P. Asymptotic stability conditions for certain classes of mechanical systems with time delay // WSEAS Transactions on Systems and Control. 2014. vol. 9. P. 388–397.

3. Александров А.Ю., Жабко А.П. Об устойчивости решений одного класса нелинейных систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2006. № 9. С. 1355–1365.

4. Aleksandrov A.Y., Zhabko A.P., Hu G.-D. Delay-independent stability conditions for some classes of nonlinear systems // IEEE Transactions on Automatic Control On stability and dissipativity of some classes of complex systems. 2014. vol. 59. no. 8. P. 2209–2214.

5. Провоторов В.В. Метод моментов в задаче гашения колебаний дифференциальной системы на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2010. № 2. С. 60–69.

6. Провоторов В.В. Собственные функции задачи Штурма-Лиувилля на графе-звезде // Математический сборник. 2008. Т. 199. № 10. С. 105–126.

7. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с.

8. Подвальный С.Л., Провоторов В.В. Определение стартовой функции в задаче наблюдения параболической системы с распределенными параметрами на графе // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2014. Т. 10. № 6. С. 29–35.

9. Provotorov V.V., Ryazhskikh V.I., Gnilitskaya Yu.A. Unique weak solvability of a nonlinear initial boundary value problem with distributed parameters in a netlike region // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer sciense. Control processes. 2017. Volume 13. Issue 3. P. 264–277.

10. Podvalny S.L., Provotorov V.V., Podvalny E.S. The controllability of parabolic systems with delay and distributed parameters on the graph // В сборнике: Procedia Computer Sciense 12th. Сер. «12th. International Symposium Intelligent Systems, INTELS 2016». 2017. P. 324–330.

11. Провоторов В.В., Провоторова Е.Н. Синтез оптимального граничного управления параболической системы с запаздыванием и распределенными параметрами на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. №. 2. С. 209–224.

12. Карелин В.В. Штрафные функции в задаче управления процессом наблюдения // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2010. № 4. С. 109–114.

13. Kamachkin A.M., Yevstafyeva V.V. Oscillations in a relay control system at an external disturbance // Control Applications of Optimization 2000: Proceedings of the 11th IFAC Workshop. 2:(2000). P. 459–462.

14. Веремей Е.И., Сотникова М.В. Стабилизация плазмы на базе прогноза с устойчивым линейным приближением // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2011. № 1. С. 116–133.

15. Aleksandrov A.Y., Aleksandrova E.A., Zhabko A.P. Asymptotic stability conditions for certain classes of mechanical systems with time delay // WSEAS Transactions on Systems and Control. 2014. Vol. 9. P. 388–397.

16. Aleksandrov A.Y., Aleksandrova E.A., Zhabko A. P. Asymptotic stability conditions of solutions for nonlinear multiconnected time-delay systems // Circuits Systems and Signal Processing. 2016. Vol. 35. no. 10. P. 3531–3554.

17. Krasnov S.V., Sergeev S.M., Mukhanova N.V., Grushkin A.N. Methodical forming business competencies for private label // Reliability, Infocom Technologies and Optimization (Trends and Future Directions) 6th International Conference ICRITO. 2017. P. 569–574.

18. Сергеев С.М. Выбор инновационной маркетинговой стратегии предприятий на основе экономико-математического моделирования // Инновации. 2013. № 3 (173). С. 116–119.

19. Сергеев С.М. Математическое моделирование потоков через POS-терминалы // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2013. т. 18. № 1. С. 227–229.

20. Iliashenko O.A., Krasnov S.V., Sergeev S.M. Calculation of high-rise construction limitations for non-resident housing fund in megacities. E3S Web of Conferences. Volume 33. 6 March 2018. Paper number 030062017 International Scientific Conference on High-Rise Construction. HRC 2017. P. 425–437.

21. Сергеев С.М. Формирование структуры управления сложными коммерческими сетями // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ - 2015). Сборник трудов VIII Международной конференции. 2015. С. 324–326.

22. Borisoglebskaya L.N., Sergeev S.M. Model of assessment of the degree of interest in business interaction with the university // Journal of Applied Economic Sciences 2018. Volume XII. Issue 8 (54) Winter 2017. P. 2423–2448.

REFERENCES

1. Provotorov V.V. Modelirovanie kolebatel'nyh processov «machta-rastyazhki» // Sistemy upravleniya i informacionnye tehnologii. 2008. № 1 (31). pp. 272–277.

2. Aleksandrov A.Y., Aleksandrova E.A., Zhabko A.P. Asymptotic stability conditions for certain classes of mechanical systems with time delay // WSEAS Transactions on Systems and Control. 2014. vol. 9. pp. 388–397.

3. Aleksandrov A.Yu., Zhabko A.P. Ob ustojchivosti reshenij odnogo klassa nelinejnyh sistem s zapazdyvaniem // Avtomatika i telemehanika. 2006. № 9. pp. 1355–1365.

4. Aleksandrov A.Y., Zhabko A.P., Hu G.-D. Delay-independent stability conditions for some classes of nonlinear systems // IEEE Transactions on Automatic Control On stability and dissipativity of some classes of complex systems. 2014. vol. 59. no. 8. pp. 2209–2214.

5. Provotorov V.V. Metod momentov v zadache gasheniya kolebanij differencial'noj sistemy na grafe // Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10: Prikladnaya matematika. Informatika. Processy upravleniya. 2010. № 2. pp. 60–69.

6. Provotorov V.V. Sobstvennye funkcii zadachi Shturma-Liuvillya na grafe-zvezde // Matematicheskij sbornik. 2008. T. 199. № 10. pp. 105–126.

7. Butkovskij A.G. Teoriya optimal'nogo upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami. M.: Nauka, 1965. 474 p.

8. Podval'nyj S.L., Provotorov V.V. Opredelenie startovoj funkcii v zadache nablyudeniya parabolicheskoj sistemy s raspredelennymi parametrami na grafe // Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta. 2014. T. 10. № 6. pp. 29–35.

9. Provotorov V.V., Ryazhskikh V.I., Gnilitskaya Yu.A. Unique weak solvability of a nonlinear initial boundary value problem with distributed parameters in a netlike region // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer sciense. Control processes. 2017. Volume 13. Issue 3. pp. 264–277.

10. Podvalny S.L., Provotorov V.V., Podvalny E.S. The controllability of parabolic systems with delay and distributed parameters on the graph // V sbornike: Procedia Computer Sciense 12th. Ser. «12th. International Symposium Intelligent Systems, INTELS 2016». 2017. pp. 324–330.

11. Provotorov V.V., Provotorova E.N. Sintez optimal'nogo granichnogo upravleniya parabolicheskoj sistemy s zapazdyvaniem i raspredelennymi parametrami na grafe // Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10: Prikladnaya matematika. Informatika. Processy upravleniya. 2017. T. 13. №. 2. pp. 209–224.

12. Karelin V.V. Shtrafnye funkcii v zadache upravleniya processom nablyudeniya // Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10: Prikladnaya matematika. Informatika. Processy upravleniya. 2010. № 4. pp. 109–114.

13. Kamachkin A.M., Yevstafyeva V.V. Oscillations in a relay control system at an external disturbance // Control Applications of Optimization 2000: Proceedings of the 11th IFAC Workshop. 2:(2000). pp. 459–462.

14. Veremej E.I., Sotnikova M.V. Stabilizaciya plazmy na baze prognoza s ustojchivym linejnym priblizheniem // Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10: Prikladnaya matematika. Informatika. Processy upravleniya. 2011. № 1. pp. 116–133.

15. Aleksandrov A.Y., Aleksandrova E.A., Zhabko A.P. Asymptotic stability conditions for certain classes of mechanical systems with time delay // WSEAS Transactions on Systems and Control. 2014. Vol. 9. pp. 388–397.

16. Aleksandrov A.Y., Aleksandrova E.A., Zhabko A. P. Asymptotic stability conditions of solutions for nonlinear multiconnected time-delay systems // Circuits Systems and Signal Processing. 2016. Vol. 35. no. 10. pp. 3531–3554.

17. Krasnov S.V., Sergeev S.M., Mukhanova N.V., Grushkin A.N. Methodical forming business competencies for private label // Reliability, Infocom Technologies and Optimization (Trends and Future Directions) 6th International Conference ICRITO. 2017. pp. 569–574.

18. Sergeev S.M. Vybor innovacionnoj marketingovoj strategii predpriyatij na osnove `ekonomiko-matematicheskogo modelirovaniya // Innovacii. 2013. № 3 (173). pp. 116–119.

19. Sergeev S.M. Matematicheskoe modelirovanie potokov cherez POS-terminaly // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tehnicheskie nauki. 2013. t. 18. № 1. pp. 227–229.

20. Iliashenko O. Krasnov S.V., Sergeev S.M. Calculation of high-rise construction limitations for non-resident housing fund in megacities. E3S Web of Conferences https://www.scopus.com/sourceid/21100795900?origin=recordpage. Volume 33. 6 March 2018. Paper number 030062017 International Scientific Conference on High-Rise Construction. HRC 2017. pp. 425–437.

21. Sergeev S.M. Formirovanie struktury upravleniya slozhnymi kommercheskimi setyami //

СОДЕРЖАНИЕ

Sovremennye metody prikladnoj matematiki, teorii upravleniya i komp'yuternyh tehnologij (PMTUKT-2015). Sbornik trudov VIII Mezhdunarodnoj konferencii. 2015. pp. 324–326.

22. Borisoglebskaya L.N., Sergeev S.M. Model of assessment of the degree of interest in business interaction with the university // Journal of Applied Economic Sciences 2018. Volume XII. Issue 8 (54) Winter 2017. pp. 2423–2448.

Провоторов Вячеслав Васильевич, доктор физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник 22 отдела научно-исследовательского 2 управления научно-исследовательского научно-исследовательского центра (проблем применения, обеспечения и управления авиацией ВВС), Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А, wwprov@mail.ru.

Жабко Алексей Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории управления, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург), Россия, 199034, г. Санкт-Петербург, Университетская набережная, 7-9, zhabko.apmath.spbu@mail.ru.