



УДК621.372.10: 621.372.14:621.372.149
ГРНТИ 78.25.41

АППРОКСИМАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК НА ПОЛИНОМАХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ЛИНЕЙНЫХ УСТРОЙСТВ ОБРАБОТКИ СПЕКТРА СИГНАЛОВ

*А.Н. ДРУЖИНИН, кандидат технических наук, доцент
ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)
Н.А. ДРУЖИНИНА
ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)*

В работе собраны известные и получены новые математические модели на полиномах третьего порядка линейных устройств обработки сигналов.

Ключевые слова: аппроксимация характеристик; математические модели на полиномах третьего порядка; характеристики затухания фильтров; групповое время запаздывания; линии задержки; дисперсионные линии задержки; характеристики фазоразностных устройств.

A SIGNALS SPECTRUM PROCESSING LINEAR DEVICES CHARACTERISTICS APPROXIMATION ON THIRD ORDER POLYNOMIALS

*A.N. DRUZHNIN, Candidate of technical sciences, Associate Professor
MESC AF "N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy" (Voronezh)
N.A. DRUZHININA
MESC AF "N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy" (Voronezh)*

The work collects known and obtained new mathematical models on third-order polynomials of linear signal processing devices.

Keywords: characteristics approximation; mathematical models on third-order polynomials; filter attenuation characteristics; group delay time; delay lines; dispersion delay lines; characteristics of phase-difference devices.

Введение. К линейным устройствам относятся фильтры, линии и дисперсионные линии задержки, фазоразностные цепи и фазовые корректоры, цепи преобразования уровня.

Математические модели характеристик линейных устройств обработки спектра сигнала полиномами второго порядка в совершенстве отработаны и систематизированы, что позволяет в настоящее время при известных данных проводить их компьютерную реализацию.

Актуальность. В работах [1, 2, 3] показаны преимущества линейных устройств обработки сигнала с характеристиками, описанных полиномами третьего порядка, по сравнению с характеристиками на полиномах второго порядка. Но их использование ограничено в связи с новизной. Существующие модели не систематизированы и находятся в различных работах.



Особенность решения задачи заключается в следующем:

- корни полиномов аппроксимации характеристик фильтров [1] и всех линий задержки [2,3] представляются совокупностями действительного и пар комплексно-сопряженных полюсов (Z-полиномы);

- задача аппроксимации фазоразностных характеристик представляется множителями любого порядка с действительными корнями [4];

- изменение частоты сигнала в уровень осуществляется с использованием различных законов и характеристик [5]. В качестве такого функционального преобразователя предложено устройство с линейно-возрастающей амплитудно-частотной характеристикой в области рабочих частот. В такой цепи сигнал постоянной амплитуды с изменяющейся частотой заполнения спектра преобразуется в амплитудно-частотно-модулированный, а после детектирования в низкочастотное напряжение, изменяющееся по амплитуде.

Целью работы является увеличение количества математических моделей фильтров, линейно-изменяющимися или не изменяющимися характеристиками группового времени запаздывания (ГВЗ) на множителях третьей степени, а также фазоразностными и линейно-возрастающими характеристиками цепей преобразования полиномами до третьей степени включительно.

Аппроксимация характеристики затухания фильтра-прототипа. Задача аппроксимации постоянной АЧХ при использовании чебышевского критерия близости в [1] формулируется следующим образом: – определить вектор варьируемых параметров минимальной размерности n , обеспечивающий выполнение условий

$$\min_{\vec{B}} \max_{\Omega} |H(\Omega) - H(\Omega, \vec{B})| \leq \delta, \text{ при } \Omega \in 0..1, \quad (1)$$

где δ – допустимое отклонение АЧХ.

При любом характере изменения АЧХ будут иметь место $2(m+1)$ полупериодов изменений функции $\delta(\Omega)$ со значениями $(1+\delta)$ и $(1-\delta)$ в диапазоне частот $0 \leq \Omega \leq 1$.

Задачи аппроксимаций вида (1) для различных характеристик затухания фильтров были решены в [1]. В таблицах 1, 2 и 3 приведены результаты решений – нормированные коэффициенты аппроксимаций затухания полиномами третьего порядка (Z-полиномами).

Таблица 1 – Коэффициенты нормированных полиномов третьего порядка с равноволновой аппроксимацией постоянной АЧХ

N	a_{ij}	0.1 дБ	0.5 дБ	1 дБ	2 дБ	3 дБ
1	2	3	4	5	6	7
3	a_{01}	1.63805	0.71569	0.49130	0.32689	0.25059
	a_{11}	2,62949	1,53489	1,23841	1,02219	0,92834
	a_{21}	1,93881	1,25291	0,98834	0,73782	0,59724
	q	1.3409	1.7061	2.0177	2.5516	3.0676
6	a_{01}	0.51552	0.30329	0.21712	0.12614	0.14927
	a_{11}	1.30233	0.84420	0.68466	0.54651	0.54168
	a_{21}	1.56514	1.10308	0.86349	0.60039	0.57517
	q	1.0146	1.3571	1.6502	2.0840	2.7042
	a_{02}	0.87323	0.54671	0.48773	0.57458	0.31663
	a_{12}	1.37292	1.13037	1.06339	1.02745	0.97791
	a_{22}	1.01667	0.71831	0.64030	0.71089	0.42116
q	3.9945	5.40033	6.7284	8.7127	11.1423	



Продолжение таблицы 1

1	2	3	4	5	6	7
9	a ₀₁	0.27362	0.17546	0.14629	0.12042	0.10808
	a ₁₁	0.85129	0.56973	0.48531	0.41864	0.38805
	a ₂₁	1.31178	0.94251	0.79132	0.63631	0.54144
	q	0.9801	1.3441	1.6471	2.1711	3.1467
	a ₀₂	0.52039	0.37337	0.32123	0.27132	0.24200
	a ₁₂	1.05754	0.87189	0.81681	0.77435	0.75550
	a ₂₂	1.04463	0.76146	0.64610	0.52887	0.45792
	q	2.2661	3.3357	4.1781	5.6221	7.0772
	a ₀₃	0.69747	0.50944	0.43966	0.37115	0.33020
	a ₁₃	1.16071	1.05611	1.02488	1.00054	0.98941
12	a ₂₃	0.78281	0.59022	0.51076	0.42904	0.37899
	q	7.7668	11.5666	14.5217	19.4932	24.3501
	a ₀₁	0.17918	0.12235	0.10347	0.09245	0.08451
	a ₁₁	0.63541	0.43311	0.36378	0.32852	0.30519
	a ₂₁	1.15751	0.84696	0.70301	0.59620	0.51239
	q	0.9762	1.3683	1.7621	2.2530	2.9201
	a ₀₂	0.35219	0.26819	0.23547	0.20921	0.19112
	a ₁₂	0.81761	0.67938	0.63564	0.61066	0.59725
	a ₂₂	0.97592	0.72187	0.60603	0.52111	0.45549
	q	2.0225	3.0599	4.0591	5.1454	6.5972
	a ₀₃	0.52029	0.40198	0.35309	0.31235	0.28392
	a ₁₃	1.00841	0.91313	0.88396	0.86297	0.85316
	a ₂₃	0.82258	0.62358	0.53403	0.46295	0.41095
	q	4.1203	6.2543	8.1651	10.5012	13.2513
	a ₀₄	0.62027	0.47987	0.42052	0.37209	0.33741
	a ₁₄	1.08627	1.03002	1.01258	1.00009	0.99391
	a ₂₄	0.67161	0.52608	0.46014	0.40528	0.36542
	q	13.4562	20.3426	26.1766	34.1717	42.783

В таблице 2, для разных требований, Z-полиномами воспроизведены коэффициенты передаточных функций шестого порядка с нулями передачи.

Таблица 2 – Нормированные коэффициенты передаточной функции с нулями передачи в виде множителей третьего порядка вида

$$H(p) = \frac{b(p^2 + w_{z1}^2)(p^2 + w_{z2}^2)}{(p^3 + a_{21}p^2 + a_{11}p + a_{01})(p^3 + a_{22}p^2 + a_{12}p + a_{02})}$$

a _{min} (dB)	b, w _{zj} , a _{ij} , K _н	a _{max} =0.1 (dB)	a _{max} =0.5 (dB)	a _{max} =1 (dB)	a _{max} =2 (dB)	a _{max} =3 (dB)
1	2	3	4	5	6	7
40	b	0.15932	0.11122	0.09253	0.08086	0.07244
	w _{z1}	1.81225	1.58043	1.50652	1.40557	1.35615
	w _{z2}	1.35623	1.22515	1.17763	1.13328	1.10840
	a ₀₁	0.86102	1.53924	0.44532	0.37368	0.33540
	a ₁₁	1.59020	1.06677	0.91885	0.81686	0.77656
	a ₂₁	1.72965	1.22461	1.018914	0.81975	0.70306
	a ₀₂	1.11777	0.77327	0.65401	0.54907	0.48801
	a ₁₂	1.28916	1.09764	1.04739	1.01264	0.99906
	a ₂₂	1.17220	0.85661	0.72820	0.60626	0.53361
	K _н	1.30	1.18	1.14	1.11	1.07



Продолжение таблицы 2

1	2	3	4	5	6	7
50	b	0.06912	0.04907	0.03381	0.03158	0.03213
	w _{z1}	2.11320	1.83259	1.82201	1.64576	1.55058
	w _{z2}	1.55507	1.38157	1.34682	1.27919	1.21695
	a ₀₁	0.72775	0.44932	0.35384	0.29274	0.26708
	a ₁₁	1.48928	0.99550	0.83923	0.73871	0.70555
	a ₂₁	1.66478	1.17779	0.96922	0.77446	0.66467
	a ₀₂	1.02564	0.70001	0.57536	0.47805	0.42823
	a ₁₂	1.31402	1.10912	1.05298	1.01121	0.99474
	a ₂₂	1.10981	0.80712	0.67475	0.55611	0.48993
	K _п	1.50	1.34	1.30	1.24	1.18
60	b	0.03080	0.02211	0.01894	0.01640	0.01446
	w _{z1}	2.49410	2.15196	2.01521	1.87345	1.80066
	w _{z2}	1.81271	1.59075	1.50356	1.41535	1.37083
	a ₀₁	0.64929	0.39564	0.31940	0.25849	0.22597
	a ₁₁	1.42324	0.94651	0.80381	0.69997	0.65510
	a ₂₁	1.62592	1.14933	0.94884	0.75350	0.63926
	a ₀₂	0.96972	0.65472	0.54437	0.44606	0.38987
	a ₁₂	1.33275	1.11728	1.05497	1.00978	0.99058
	a ₂₂	1.07616	0.78029	0.65597	0.53533	0.46407
	K _п	1.75	1.54	1.46	1.37	1.34
70	b	0.01395	0.01004	0.00910	0.00601	0.00663
	w _{z1}	2.97163	2.54871	2.33403	2.31313	2.11203
	w _{z2}	2.14082	1.85815	1.74055	1.69501	1.57325
	a ₀₁	0.60280	0.36100	0.29030	0.22571	0.20066
	a ₁₁	1.38329	0.91177	0.77156	0.65878	0.62043
	a ₂₁	1.60446	1.12889	0.93071	0.73185	0.62231
	a ₀₂	0.93636	0.62363	0.51712	0.41406	0.36502
	a ₁₂	1.34817	1.12249	1.05648	1.00769	0.98715
	a ₂₂	1.05884	0.76284	0.64031	0.51595	0.44836
	K _п	2.06	1.78	1.67	1.60	1.52

В таблице 3 воспроизведены коэффициенты передаточных функций девятого порядка с нулями передачи Z-полиномами.

Таблица 3 – Нормированные коэффициенты передаточной функции с нулями передачи в виде множителей третьего порядка вида

$$H(p) = \frac{b(p^2 + w_{z1}^2)(p^2 + w_{z2}^2)(p^2 + w_{z3}^2)}{(p^3 + a_{21}p^2 + a_{11}p + a_{01})(p^3 + a_{22}p^2 + a_{12}p + a_{02})(p^3 + a_{23}p^2 + a_{13}p + a_{03})}$$

a _{min} (dB)	b, w _{zj} , a _{ij} , K _п	a _{max} =0.1 (dB)	a _{max} =0.5 (dB)	a _{max} =1 (dB)	a _{max} =2 (dB)	a _{max} =3 (dB)
1	2	3	4	5	6	7
50	b	0.12740	0.07888	0.08816	0.06722	0.05642
	w _{z1}	1.13687	1.08798	1.05822	1.04429	1.03649
	w _{z2}	1.24044	1.16668	1.11945	1.09682	1.08356
	w _{z3}	1.65285	1.51511	1.39040	1.34015	1.30920
	a ₀₁	0.68729	0.48423	0.45811	0.39960	0.36952
	a ₁₁	1.34479	0.94768	0.85680	0.76352	0.72685
	a ₂₁	1.68195	1.25234	1.09487	0.90451	0.79259
	a ₀₂	0.94958	0.73238	0.68701	0.60078	0.55008



Продолжение таблицы 3

1	2	3	4	5	6	7
50	a_{12}	1.16769	1.01066	0.97670	0.95012	0.94141
	a_{22}	1.25896	0.95816	0.85667	0.72780	0.65203
	a_{03}	1.06057	0.82263	0.75996	0.65976	0.60010
	a_{13}	1.09289	1.03177	1.01459	1.00444	1.00052
	a_{23}	1.08010	0.84898	0.78033	0.67542	0.61254
	K_{Π}	1.11	1.07	1.05	1.03	1.02
55	b	0.07553	0.05159	0.05285	0.04072	0.03442
	w_{z1}	1.17666	1.11396	1.08220	1.06469	1.05466
	w_{z2}	1.75412	1.57185	1.15635	1.12963	1.11377
	w_{z3}	1.29422	1.21018	1.46741	1.41216	1.37805
	a_{01}	0.61146	0.43508	0.40006	0.34822	0.32155
	a_{11}	1.27424	0.90193	0.80603	0.71695	0.68159
	a_{21}	1.62733	1.21425	1.05133	0.86661	0.75789
	a_{02}	0.87982	0.68251	0.62818	0.54864	0.50195
	a_{12}	1.15913	0.99978	0.96256	0.93415	0.92450
	a_{22}	1.21877	0.92846	0.81907	0.69345	0.61954
	a_{03}	1.00179	0.78014	0.70916	0.61485	0.55874
	a_{13}	1.10135	1.03481	1.01635	1.00470	1.00007
	a_{23}	1.02741	0.81107	0.73414	0.63429	0.57440
	K_{Π}	1.14	1.10	1.07	1.05	1.04
60	b	0.05081	0.03687	0.03205	0.0249	0.02116
	w_{z1}	1.21661	1.14074	1.11152	1.09020	1.07776
	w_{z2}	1.81733	1.62348	1.19926	1.16826	1.14968
	w_{z3}	1.34606	1.24360	1.55179	1.49129	1.45385
	a_{01}	0.56168	0.40215	0.35438	0.30759	0.28348
	a_{11}	1.22374	0.86896	0.76163	0.67605	0.64170
	a_{21}	1.58937	1.18725	1.01454	0.83446	0.72840
	a_{02}	0.83246	0.64789	0.57977	0.50543	0.46188
	a_{12}	1.15160	0.99089	0.94836	0.91830	0.90771
	a_{22}	1.19323	0.90846	0.78935	0.66601	0.59341
	a_{03}	0.96253	0.75071	0.66748	0.57774	0.52442
	a_{13}	1.10785	1.03706	1.01787	1.00480	0.99949
	a_{23}	0.99310	1.78530	0.69698	0.60093	0.54329
	K_{Π}	1.18	1.13	1.10	1.08	1.06
65	b	0.03299	0.02351	0.01963	0.0157	0.01368
	w_{z1}	1.26348	1.17847	1.24843	1.12114	1.10561
	w_{z2}	1.90854	1.71188	1.64397	1.21297	1.18895
	w_{z3}	1.40409	1.29183	1.14648	1.56517	1.52112
	a_{01}	0.51746	0.36590	0.31809	0.27605	0.25508
	a_{11}	1.17632	0.83053	0.72314	0.64130	0.60918
	a_{21}	1.55384	1.15591	0.98329	0.80783	0.70499
	a_{02}	0.78909	0.60862	0.53970	0.47044	0.43067
	a_{12}	1.14345	0.97965	0.93462	0.90334	0.89254
	a_{22}	1.17017	0.88596	0.76556	0.64458	0.57376
	a_{03}	0.92623	0.71700	0.63297	0.54778	0.49779
	a_{13}	1.11392	1.03960	1.01913	1.00478	0.99886
	a_{23}	0.96186	0.75608	0.66681	0.57453	0.51960
	K_{Π}	1.23	1.16	1.13	1.11	1.08



Продолжение таблицы 3

1	2	3	4	5	6	7
70	b	0.02318	0.01465	0.01212	0.00995	0.00920
	w _{z1}	1.30865	1.22275	1.18737	1.15781	1.13513
	w _{z2}	1.98390	1.81485	1.30413	1.26401	1.22951
	w _{z3}	1.45692	1.35162	1.74445	1.64532	1.58829
	a ₀₁	0.48632	0.33457	0.28898	0.25047	0.23349
	a ₁₁	1.14113	0.79510	0.68993	0.61108	0.58279
	a ₂₁	1.52768	1.12727	0.95662	0.78487	0.68616
	a ₀₂	0.75777	0.57360	0.50637	0.44099	0.40609
	a ₁₂	1.13670	0.96834	0.92166	0.88927	0.87934
	a ₂₂	1.15405	0.86638	0.74629	0.62690	0.55852
	a ₀₃	0.90007	0.68682	0.60421	0.52247	0.47675
	a ₁₃	1.11856	1.04192	1.02018	1.00465	0.99824
	a ₂₃	0.93974	0.73036	0.64211	0.55255	0.50112
	K _п	1.28	1.20	1.17	1.14	1.12

Аппроксимация характеристики группового времени запаздывания низкочастотных линий задержки. Известные методы решения задачи аппроксимации постоянного ГВЗ (τ_0) в полосе нормированных значений частот $\Omega = 0 \dots \Omega_m$ с допустимой погрешностью Δt или $\delta_i = \Delta t / \tau_0$ приводят к использованию полиномов четной или нечетной степени. Порядок аппроксимирующей функции n зависит от требуемой величины $\Omega = \omega_{\chi} \tau_0$, где ω_{χ} - граничная частота. Передаточную функцию фазовых устройств можно представить множителями третьего порядка общего вида

$$H(\Lambda) = \prod_{i=1}^m \frac{-\Lambda^3 + A_{2i}\Lambda^2 - A_{1i}\Lambda + A_{0i}}{\Lambda^3 + A_{2i}\Lambda^2 - A_{1i}\Lambda + A_{0i}}, \quad (2)$$

где A_{ji} - коэффициенты аппроксимирующих полиномов Гурвица; m - число сомножителей третьего порядка. В свою очередь выражение (2) можно разложить на множители 1-го и 2-го порядков

$$H(\Lambda) = \left(\frac{-\Lambda + B}{\Lambda + B} \right)^m \prod_{i=1}^m \frac{\Lambda^2 - A_{2i}\Lambda + A_{0i}}{\Lambda^2 + A_{2i}\Lambda + A_{0i}}. \quad (3)$$

Выражение для группового времени запаздывания по передаточной функции (3) будут иметь вид

$$t_r(\Omega) = \frac{A_1 A_0 + (A_1 A_2 - 3A_0)\Omega^2 + A_2 \Omega^4}{A_0^2 + A_1(\Omega^2 - 2\Omega^4) + A_2^2 \Omega^4 - 2A_0 A_2 \Omega^2 + \Omega^6}, \quad (4)$$

где A_0, A_1, A_2 - коэффициенты аппроксимирующих полиномов третьего порядка.

Групповое время для функции (3) может быть представлено в следующем виде



$$t_T(\Omega) = \left(\frac{2b}{b^2 + \Omega^2} \right)^{m+1} \sum_{i=1}^m \frac{2a_{1i}(a_{0i} + \Omega^2)}{(a_{0i} + \Omega^2)^2 + a_{1i}^2 \Omega^2} \quad (5)$$

Нормированное значение ГВЗ полагаем равным единице ($\tau_0 = 1$), при этом нормированная частота Ω может принимать значения от нуля до нескольких единиц.

Решить задачу аналитически не представляется возможным, поэтому необходимо воспользоваться численными алгоритмами решения системы уравнений

$$1 - t_T(\Omega_j, \Omega_m, \vec{A}) = (-1)^j \delta_t, \quad (6)$$

где Ω_m – максимальное значение нормированной частоты.

В основе этих методов лежит критерий Чебышева [1], который позволяет судить о том, является ли полученный ответ решением задачи наилучшего равномерного приближения. Для этого рассматривается множество значений нормированных частот $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{2m+1}$, на которых функция $t_T(\Omega_i, \Omega_m, \vec{A})$ принимает свои наибольшие и наименьшие значения. На отрезке $[\Omega_1, \dots, \Omega_{2m+1}]$ выберем систему из $2(m+1)$ точек:

$$\Omega_1 \leq \Omega_{11} < \Omega_{21} < \Omega_{31} < \dots < \Omega_{2m,1} \leq \Omega_{2m+1}. \quad (7)$$

Первый индекс означает номер точки на отрезке частот, а второй – номер последовательности функции. В соответствии с этим для построения передаточных функций линий задержки с равноволновым ГВЗ необходимо решить систему из $2m+1$ уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Delta t(\Omega_0, \vec{A}) &= (-1)^0 \delta_t \\ \Delta t(\Omega_1, \vec{A}) &= (-1)^1 \delta_t \\ \dots & \\ \Delta t(\Omega_{2m+1}, \vec{A}) &= (-1)^{2m+1} \delta_t \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

относительно коэффициентов A_{0i}, A_{1i}, A_{2i} . Величины $\Delta t(\Omega, \vec{A})$ рассчитываются по формуле (6). Значения частот $\Omega_0, \dots, \Omega_{2m+1}$ вначале не определены, поэтому воспользуемся следующим подходом нахождения их значения. Сначала выбираем максимальное значение частоты $\Omega_m \approx 3m$, затем разбив интервал частот $0 - \Omega_m$ на $(2m+1)$ равных участков получим значения $\Omega_i = i3m / (2m+1)$.

В результате решения системы уравнений (8) получим значения функции $\Delta t(\Omega_j, \vec{A})$, при которых график частотной зависимости $t_T(\Omega)$ для $m=2$ будет иметь вид, представленный на рисунке 1.

Из графика видна необходимость смещения положения частот Ω_j с целью уточнения последующего решения для вектора \vec{A} . То есть в качестве неизвестных далее полагают значения частот $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{2m+1}$. Их интуитивно правят перебором значений по стрелке (смотреть пример на рисунке 1) или определением частотных значений в экстремумах производной -решением системы уравнений



$$\frac{d\Delta t(\Omega_i, \vec{A})}{d\Omega} = 0, \quad i=1, \dots, 2(m+1), \quad (9)$$

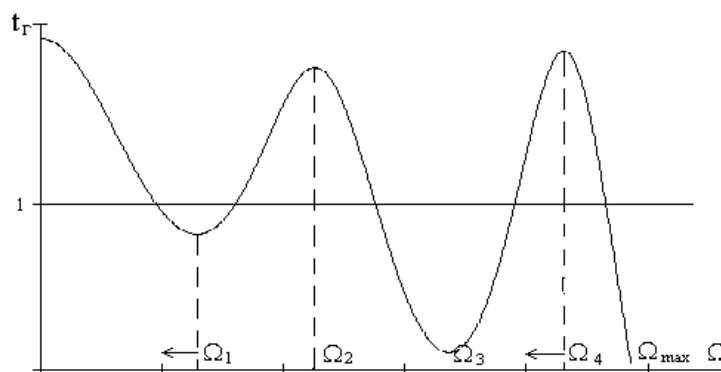


Рисунок 1 – График частотной зависимости ГВЗ после первой итерации

Приняв решение о новых значениях частот $\Omega_1, \Omega_2 \dots \Omega_{2m+1}$, их подставляют в уравнения (8) и повторяются вычисления \vec{A} . То есть, вычисления носят итеративный характер и продолжаются до тех пор, пока величина $\xi = \sum_1^{2m+1} \left(\frac{\Omega_i''}{\Omega_i'} - 1 \right)$ не станет достаточно маленькой величиной (как правило $\xi \leq 10^{-6}$) и не будет определена величина Ω_m .

В [1] рассчитаны значения коэффициентов для низкочастотных линий задержек с полиномами типа $V(p) = (p + b)^m \prod_{i=1}^m (p^2 + a1_i p + a0_i)$, которые приведены в таблице 4.

Таблица 4 – Значения нормированных коэффициентов аппроксимирующих постоянное групповое время низкочастотных линий задержки для различных значений m и δt

m	δt	B	a01	a11	a02	a12	a03	a13	Ω_m
1	0.5	1,910	6,124	3,216					1,421
	1	1,806	6,548	3,005					1,615
	2	1,728	6,828	2,973					1,947
	5	1,580	7,221	2,737					2,121
	10	1,333	7,481	2,312					2,854
2	0.5	3,471	33,236	3,647	15,341	5,012			3,98
	1	3,179	35,780	3,196	15,427	4,166			4,842
	2	3,029	36,765	3,175	15,707	3,733			5,963
	5	2,625	39,961	2,782	15,845	3,491			6,528
	10	2,327	41,780	2,427	16,845	2,920			7,006
3	0.5	4,521	23,085	5,956	52,701	4,486	108,725	2,828	9,076
	1	4,485	23,500	5,386	57,480	4,302	102,445	3,096	9,536
	2	4,218	23,926	4,841	61,236	4,302	100,576	3,249	10,022
	5	3,738	24,092	3,962	61,279	3,489	108,608	2,831	10,704
	10	3,316	24,923	3,227	65,078	2,904	116,492	2,461	11,287

Аппроксимация группового времени запаздывания линий задержки в полосе нормированных значений частот $\Omega = 1 \dots 2$. Применение модифицированного



алгоритма Ремеза в [2] позволило решить задачу аппроксимации постоянного ГВЗ Z – полиномами, для передаточных функций вида (3), которые приведены в таблице 5.

Таблица 5 – Значения коэффициентов аппроксимирующих постоянное групповое время для различных значений m и δt при $\Omega = 1 \dots 2$

m	Δ/τ_0 [%]	B	$A_{1j=1,2,\dots,m}$	$A_{0j=1,2,\dots,m}$	τ_0
2	0,5	3.68983	1.729406; 1.522487	1.774209; 4.910166	4.729624
	1	4.65422	1.436971; 1.332364	1.597018; 4.485740	5.003722
	3	5.21864	1.072108; 1.030258	1.485687; 3.980972	5.76849
	5	5.21864	0.927838; 0.900109	1.466023; 3.804337	6.231167
3	0,5	5.21866	0.839646; 0.989253; 0.801469	1.106575; 2.530683 4.338312	8.926236
	1	5.21866	0.726741; 0.852957; 0.701397	1.129033; 2.457921; 4.154379	9.649080
	3	5.21866	0.565464; 0.653528; 0.553424	1.170276; 2.374871 3.920399	10.966856
	5	5.21864	0.498069; 0.568506; 0.488697	1.189108; 2.343289; 3.831256	11.650535
4	0,5	10.1372	0.534953; 0.673457; 0.669469; 0.524831	1.013372; 1.861693; 2.950012; 4.194008	13.366354
	1	10.1372	0.470487; 0.583367; 0.581429; 0.464055	1.044878; 1.851953; 2.895636; 4.080779	14.304889
	3	10.1372	0.370323; 0.443778; 0.442472; 0.366526	1.093643; 1.841768; 2.818086; 3.920057	16.057727
5	0,5	16.5169	0.390894; 0.505308; 0.529248; 0.503460; 0.387523	0.990134; 1.58298; 2.32943; 3.20597; 4.142206	18.202009
	1	16.5169	0.344889; 0.437113; 0.455747; 0.436412; 0.3433	1.019833; 1.588656; 2.310403; 3.157631; 4.056605	19.364355
	3	16.5169	0.275407; 0.334999; 0.345239; 0.333653; 0.273484	1.062014; 1.597394; 2.282163; 3.085344; 3.935164	21.41432

На рисунке 2 представлены графики функции $t_T(\Omega)$ для случая $\Delta t_T(\Omega)/\tau_0 = 3\%$.

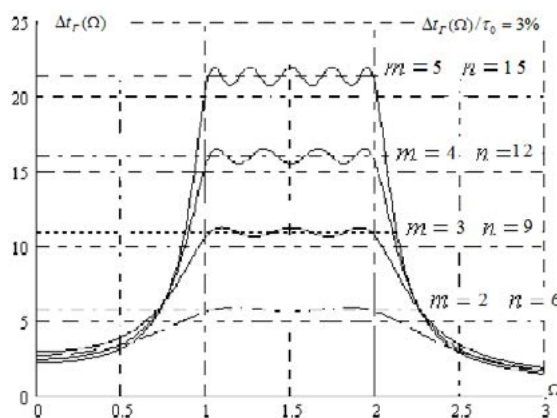


Рисунок 2 – Графики $t_T(\Omega)/\tau_0$ при $m = 2, 3, 4, 5$, когда $\Delta t_T(\Omega)/\tau_0 = 3\%$



Аппроксимация линейно-убывающей низкочастотной характеристики группового времени запаздывания. Математическую модель характеристик дисперсионных линий задержки (ДЛЗ) определим в полосе нормированных частот $\hat{\omega} \in \hat{\omega}_{-x} \dots \hat{\omega}_x$ с различными комплексно-сопряженными полюсами передаточной функции (3), в которой m – число множителей третьего порядка, а $\Lambda = j\omega/\omega_{норм.}$. Тогда групповое время для функции (3) может быть представлено в виде

$$t_{\Gamma}(\vec{A}, \hat{\omega}) = \left(\frac{2 \cdot B \cdot m}{B^2 + \hat{\omega}^2} \right) + \sum_{i=1}^m \frac{2A_{0i}(A_{0i} + \hat{\omega}^2)}{(A_{0i} - \hat{\omega}^2)^2 + A_{1i}^2 \hat{\omega}^2}. \quad (10)$$

Необходимо определить численными методами в полосе частот $\hat{\omega} \in \hat{\omega}_{-x} \dots \hat{\omega}_x$ такие компоненты вектора \vec{A} , при которых функция $t_{\Gamma}(\hat{\omega}, \vec{A})$ наименее отклоняется от заданных значений функции $t_{\Gamma}(\hat{\omega}) = \alpha_1 - 2\alpha_2\hat{\omega}$. И задачу построения математической модели ГВЗ дисперсионной линии задержки можно сформулировать следующим образом [3]: *определить вектор варьируемых параметров $\vec{A} = \{B, A_{01}, A_{11}, \dots, A_{0m}, A_{1m}, \alpha_1, d\}$, ($d \equiv 2\alpha_2$) обеспечивающий выполнение условий:*

$$\min_{\vec{A}} \max_{\hat{\omega}} \left| (\alpha_1 - d\hat{\omega} - t_{\Gamma}(\hat{\omega}, \vec{A})) \right| = \Delta t_{\max}, \quad \hat{\omega} \in 1 \dots 2, \quad m = \min, \quad (11)$$

Для решения системы уравнений, описываемых условиями (11), рассматривается множество значений нормированных частот $(\hat{\omega}_0, \hat{\omega}_1 \dots \hat{\omega}_{n-1})$, на которых функция $\Delta t(\hat{\omega}_i, \vec{A})$ принимает свои наибольшие и наименьшие значения. В первом решении системы уравнений частоты $\hat{\omega}_i$ задаются. В качестве начального приближения предлагается вычислить их по формуле:

$$\hat{\omega}_i^{(0)} = 1 + i/(2m + 1), \quad (12)$$

или уточняется вычислением значений частот $\hat{\omega}_i$ на основании решения системы уравнений

$$d\Delta t(\hat{\omega}_i, \vec{A})/d\hat{\omega} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2m + 1. \quad (13)$$

Последующие значения $\hat{\omega}_i$ используются в соответствующей итерации расчета вектора \vec{A} .

Вычисления повторяется до тех пор, пока величин $\xi = \sum_{j=1}^{2m} \frac{1}{m} \left(\frac{\hat{\omega}'_j}{\hat{\omega}_j} - 1 \right)$ не станет малой ($\xi \leq 10^{-6}$).

Графики $t_{\Gamma}(\hat{\omega})$, отражающие результаты аппроксимации $\Delta t_{\Gamma}(\hat{\omega})/\tau_0 = 1\%$ и $m = 2, 3, 4, 5$, рассчитанные в [3] приведены на рисунке 3.

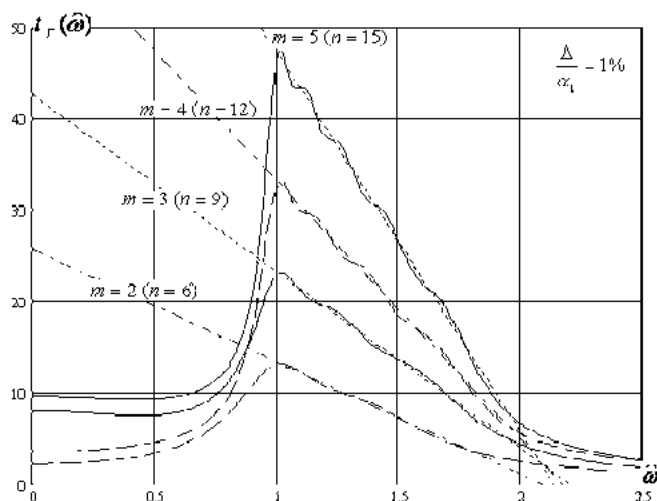


Рисунок 3 – Графики функции ГВЗ при $m = 2, 3, 4, 5$ и $\Delta t_r(\omega)/\tau_0 = 1\%$

Результаты расчетов векторов варьируемых параметров для различных m и значений ошибок аппроксимации Δt приведены в таблице 6.

Таблица 6 – Коэффициенты полиномов передаточных функций (10) полосовой ДЛЗ

Δ/α_1 [%]	$2\alpha_2$	α_1	D	B	$A_{0j=1,2,\dots,m}$	$A_{1j=1,2,\dots,m}$	
m=2 n=6	0,5	13.1173	26.650	4.24	5.2186	0.4211; 0.6684	1.0128; 1.8925
	1	12.2761	25.650	4.08	5.2186	0.4267; 0.6813	1.0403; 1.9644
	3	11.6216	25.765	4.1	5.2186	0.3686; 0.5699	1.1152; 2.1514
m=3 n=9	0.5	15.6122	35.931	5.72	0.9211	0.3504; 0.5193; 0.6939	1.0006; 1.6172; 2.6736
	1	19.3214	42.545	6.78	0.9211	0.2830; 0.4115; 0.5559	1.0299; 1.5849; 2.5442
	3	26.4354	54.246	8.64	5.2186	0.1888; 0.2622; 0.3536	1.0592; 1.5156; 2.3126
m=4 n=12	0.5	23.4901	53.057	8.44	3.7045	0.2288; 0.3312; 0.4178; 0.5477	0.9924; 1.3675; 1.9333; 2.8400
	1	28.3273	61.567	9.8	3.7045	0.1892; 0.2662; 0.3326; 0.4413	1.0150; 1.3608; 1.8826; 2.7216
	3	39.778	81.036	12.9	3.7045	0.1298; 0.1715; 0.2074; 0.2733	1.0409; 1.3376; 1.7785; 2.4839
m=5 n=15	0.5	35.8269	78.749	12.54	1.0071	0.1685; 0.2357; 0.2813; 0.3408; 0.4424	0.9958; 1.2648; 1.6388; 2.1698; 2.9671
	1	41.5642	88.834	14.14	1.2167	0.14083 0.1918 0.2281; 0.2745; 0.3593	1.0122; 1.2626 1.6110; 2.099; 2.8466
	3	52.395	105.02	16.72	10.466	0.0998; 0.1284; 0.1489; 0.1763; 0.2286	1.0309; 1.2494; 1.5497; 1.966; 2.6062

Модели фазоразностной характеристики на множителях третьего порядка.

Задача аппроксимации фазоразностной характеристики множителями третьего порядка может быть сформулирована [4] следующим образом: *определить векторы варьируе-*



мых параметров $\vec{A}_1 = \{A_{0i}, A_{1i}, A_{2i}\}$ и $\vec{A}_2 = \{A_{0j}, A_{1j}, A_{2j}\}$, обеспечивающие выполнение условий:

$$\min_A \max_{\Omega} \left| \Phi_0 - \sum_{i=1}^N \Theta_{1i}(\Omega, \vec{A}_1) + \sum_{j=1}^M \Theta_{2j}(\Omega, \vec{A}_2) \right| \leq \Delta\Phi_0 \quad (14)$$

где Φ_0 – заданная разность фаз, $\Delta\Phi_0$ – допустимая ошибка аппроксимации, $\Theta_1(\Omega, \vec{A}_1)$ и $\Theta_2(\Omega, \vec{A}_2)$ – ФЧХ звеньев в первом и втором плече фазовращателя, $\vec{A}_1 = \{A_{0i}, A_{1i}, A_{2i}\}$ и $\vec{A}_2 = \{A_{0j}, A_{1j}, A_{2j}\}$ – векторы варьируемых параметров звеньев в первом и втором плече фазоразностной цепи, $\Omega = \omega / \sqrt{\omega_{\chi} \omega_{-\chi}} = \omega / \omega_0$ – нормированная частота, где ω_{χ} , $\omega_{-\chi}$ – верхняя и нижняя частота рабочего диапазона.

Фазоразностное устройство при выполнении функции фазовращателя состоит из двух каналов, которое описывается передаточными функциями

$$\left\{ \begin{aligned} H_1(\Lambda) &= \frac{\prod_{j=1}^{n/3} (-\Lambda^3 + A_{21j}\Lambda^2 - A_{11j}\Lambda + A_{01j})}{\prod_{j=1}^{n/3} (\Lambda^3 + A_{21j}\Lambda^2 + A_{11j}\Lambda + A_{01j})} \quad \text{и} \quad H_2(\Lambda) = \frac{\prod_{j=1}^{n/3} (-\Lambda^3 + A_{22j}\Lambda^2 - A_{12j}\Lambda + A_{02j})}{\prod_{j=1}^{n/3} (\Lambda^3 + A_{22j}\Lambda^2 + A_{12j}\Lambda + A_{02j})} \end{aligned} \right. \quad (15)$$

ФЧХ на множителях третьего порядка определяются равенством

$$\Theta_i(\Omega) = -2 \operatorname{arctg} \frac{A_{1i}\Omega - \Omega^3}{A_{0i} - A_{2i}\Omega^2} \quad \text{где} \quad i = 1, 2, \quad (16)$$

тогда в общем виде фазоразностная характеристика примет вид

$$\Phi(\Omega) = \Theta_{1i}(\Omega) - \Theta_{2j}(\Omega) = \sum_{j=1}^M 2 \operatorname{arctg} \frac{A_{1j}\Omega - \Omega^3}{A_{0j} - A_{2j}\Omega^2} - \sum_{i=1}^N 2 \operatorname{arctg} \frac{A_{1i}\Omega - \Omega^3}{A_{0i} - A_{2i}\Omega^2}. \quad (17)$$

Порядок функций (17) зависит от заданных значений Ω_{χ} , $\Omega_{-\chi}$ и величины допустимой ошибки аппроксимации $\Delta\Phi_0$.

В работе [4] было предложено решение задачи (14) на основе составления и вычисления уравнений в заданном диапазоне нормированных частот при значениях параметра $n = 2m$, определяющем порядок аппроксимирующей функции.

В таблицах 7, 8 и 9 представлены решения задачи аппроксимации фазоразностных характеристик различных n и коэффициентов перекрытия по частоте.

Таблица 7 – Значения коэффициентов передаточной функции фазовращателя при $n = 6$

K_f	20	30	40	50	60
A_1	11,9720	13,3677	14,5151	15,5047	16,3832
A_2	3,3619	3,6392	3,8598	4,0452	4,2063
A_3	1,4701	1,5126	1,5448	1,5708	1,5927
A_4	0,6801	0,6610	0,6473	0,6366	0,6278
A_5	0,2974	0,2747	0,2590	0,2472	0,2377
A_6	0,0835	0,0748	0,0688	0,0644	0,0610
$\Delta\Phi_0$, град	0,2662	0,4721	0,6705	0,8573	1,0325
S , град	9,8682	14,6481	18,5049	217063	24,4292



Решение задачи аппроксимации разности фаз для $n = 5, 7$ при различных коэффициентов перекрытия по частоте представлены в таблицах 7 и 8.

Таблица 8 – Значения коэффициентов передаточной функции фазовращателя при $n = 5$

K_f	5	10	15	20	25	30	50
A_1	7,2978	8,3630	9,1907	9,8800	10,4787	11,0119	12,7399
A_2	2,1462	2,3336	2,4720	2,5831	2,6766	2,7578	3,0088
A_3	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
A_4	0,4659	0,4285	0,4045	0,3871	0,3736	0,3626	0,3323
A_5	0,1370	0,1195	0,1088	0,1012	0,0954	0,0908	0,0784
$\Delta\Phi_0$, рад	0,059	0,2840	0,5524	0,8212	1,0791	1,3236	2,1757
S , град	3,3349	10,365	16,3061	21,1351	25,1327	28,5136	38,2469

Таблица 9 – Значения коэффициентов передаточной функции фазовращателя при $n = 7$

K_f	30	40	60	80	100
A_1	15,7050	17,0676	19,2888	21,1051	22,6676
A_2	4,5032	4,8078	5,2912	5,6754	5,9988
A_3	2,0442	2,1181	2,2304	2,3159	2,3855
A_4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
A_5	0,4891	0,4721	0,4483	0,4317	0,4191
A_6	0,2220	0,2079	0,1889	0,1761	0,1666
A_7	0,0636	0,0585	0,0518	0,0473	0,0441
$\Delta\Phi_0$, град	0,1684	0,2536	0,4196	0,5746	0,7182
S , град	7,1121	9,5257	13,5141	16,7050	19,3521

Математические модели характеристики преобразователя с линейной наклонной АЧХ. Линейно-возрастающую функцию частоты в диапазоне частот $\Omega = 1 \dots 2$ можно представить в следующем виде:

$$T(\Omega) = \alpha_0 + \alpha_1(\Omega - 1), \text{ где } \alpha_1 = \frac{H(\Omega = 2) - H(\Omega = 1)}{\Delta\Omega}. \quad (18)$$

Задавшись передаточной функцией сомножителями третьего порядка в виде

$$H(p) = \prod_{i=1}^{n/3} \frac{b_{0i} p^3}{p^3 + p^2 a_{2i} + p a_{1i} + a_{0i}}, \quad (19)$$

получим нормированную функцию АЧХ цепи преобразования

$$H(\vec{A}, \Omega) = \prod_{i=1}^{n/3} \frac{\Omega^3}{\sqrt{(A_{0i} - \Omega^3)^2 + \Omega^2 (A_{1i} - A_{2i} \Omega)^2}}, \quad (20)$$

где $p = j\omega$ и n – порядок передаточной функции.



Тогда с учетом (18 и 20) задачу аппроксимации можно сформулировать следующим образом [5]: *определить вектор варьируемых параметров \vec{A} и минимальный порядок аппроксимирующей функции, обеспечивающие выполнение условий*

$$\min_{\vec{A}} \max_{\Omega} \left| \alpha_0 + \alpha_1(\Omega - 1) - H(\vec{A}, \Omega) \right| \leq \Delta H, \quad i \in 1 \dots n. \quad (21)$$

Решение задачи (21) предусматривает наилучшее в смысле Чебышева приближение к заданной линейно-возрастающей функции. Для решения её рассматривается множество значений частоты Ω_i , на которых функция $\Delta H(\Omega_i)$ принимает свои наибольшие и наименьшие значения $n + 2$ раза. В связи с этим получим систему уравнений

$$\left| T(\Omega_i) - H(\vec{A}, \Omega_i) \right| = \Delta H; \quad i \in 0 \dots n + 1. \quad (22)$$

В качестве первоначальных значений частот расположения наибольших и наименьших значений функций $\Delta H(\Omega_i)$ выбираем значения нормированных частот, вычисленные по формуле $\Omega_i = i/(n + 1)$. На втором этапе вычислений, значения частот Ω_i уточняются путем решения системы уравнений

$$d\Delta H(\Omega_i)/d\Omega; \quad i \in 1 \dots n + 1. \quad (23)$$

Затем, уточняются значения коэффициентов передаточной функции при подстановке частот Ω_i в уравнения (22). Вычисления циклично продолжаются до тех пор, пока величина

$$\xi = 1 - \Omega_k / \Omega_{k+1} \quad (24)$$

не станет $\leq 10^{-6}$.

В работе [5] осуществлены решения задач аппроксимации линейно-возрастающей амплитудно-частотными характеристики для $n = 3, 4, 5$ и 6 звеньями ФВЧ второго и третьего порядков, которые представлены в таблице 10.

Таблица 10 – Значения коэффициентов аппроксимирующих функций

n	ΔH	A_{01}	A_{11}	A_{02}	A_{12}	A_{03}	A_{13}	α_1	α_0	$H_2 - H_1$
3	0,035	11,112		1,065		2,426		0,686	-0,582	0,68
4	0,05	1,918	0,317	3,861	0,384			10,550	-10,19	10,9
	0,02	1,716	0,474	4,067	0,621			5,046	-4,78	5,31
	0,01	1,595	0,591	4,318	0,851			3,171	-2,85	3,49
5	0,0055	1,425	1,425	1,262	4,651		1,205	1,628	-1,424	1,82
6	0,03	1,468	0,166	2,450	0,387	4,005	0,298	2,535	-25,65	25
	0,02	1,409	0,199	2,401	0,452	4,077	0,357	18,778	-18,673	18,2
	0,01	1,266	0,31	2,276	0,682	4,449	0,604	7,65	-7,2	8,1

Выводы. Особенностью Z-полиномов является увеличенное число вещественных корней, что приводит к повышению устойчивости цепей реализации, по сравнению с реализациями на полиномах второй степени.

Использование математических моделей на полиномах третьего порядка, позволяют реализовать линейные устройства с меньшим числом звеньев.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Змий Б.Ф., Дружинин А.Н. Синтез фильтровых и фазовых устройств в ARLC-элементном базисе //Военная электроника: Сборник статей по материалам Межвузовской НТК. Воронеж: ВИРЭ, 2004. С. 75 – 78.
2. Змий Б.Ф., Дружинин А.Н. Синтез фазовых устройств на активных RLC четырехполюсниках третьего порядка //Радиолокация, навигация, связь: Сборник статей по материалам IX Международной НТК. Воронеж: ВГУ, 2003. С. 504 – 515.
3. Дружинин А.Н., Дружинина Н.А., В.С. Кострикин. Аппроксимация полиномами третьего порядка группового времени запаздывания //Сборник статей по материалам IV Межвузовской НПК курсантов и слушателей, Воронеж: ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Ч.4, 2017. С. 26-34.
4. Дружинин А.Н., Змий Б.Ф. Синтез фазоразностных устройств на активных RLC четырёхполюсниках // Телекоммуникации 2005. № 12, С. 12-18.
5. Дружинин А.Н., Дружинина Н.А., Воронов А.А. Решение задач аппроксимации характеристик устройств преобразования //Сборник статей по материалам IV Межвузовской НПК курсантов и слушателей. Воронеж: ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Ч. 4, 2017. С.17-26.

REFERENCES

1. Zmij B.F., Druzhinin A.N. Sintez fil'trovykh i fazovykh ustrojstv v ARLC-ehlementnom ba-zise //Voennaya ehlektronika: Sbornik statej po materialam Mezhvuzovskoj NTK. Voronezh: VIREH, 2004. S. 75 – 78.
2. Zmij B.F., Druzhinin A.N. Sintez fazovykh ustrojstv na aktivnykh RLC chetyrekhpolyusnikakh tret'ego poryadka //Radiolokatsiya, navigatsiya, svyaz': Sbornik statej po materialam IKH Mezhdunarodnoj NTK. Voronezh: VGU, 2003. S. 504 – 515.
3. Druzhinin A.N., Druzhinina N.A., V.S. Kostrikin. Approksimatsiya polinomami tret'ego poryadka gruppovogo vremeni zapazdyvaniya //Sbornik statej po materialam IV Mezhvuzovskoj NPK kursantov i slushatelej, Voronezh: VUNTS VVS «VVA im. prof. N.E. Zhukovskogo i Yu.A. Gagarina» (g. Voronezh), CH.4, 2017. S. 26-34.
4. Druzhinin A.N., Zmij B.F. Sintez fazoraznostnykh ustrojstv na aktivnykh RLC chetyryokhpolyusnikakh // Telekommunikatsii 2005. № 12, S. 12-18.
5. Druzhinin A.N., Druzhinina N.A., Voronov A.A. Reshenie zadach approksimatsii kharakteristik ustrojstv preobrazovaniya //Sbornik statej po materialam IV Mezhvuzovskoj NPK kursantov i slushatelej. Voronezh: VUNTS VVS «VVA im. prof. N.E. Zhukovskogo i Yu.A. Gagarina» (g. Voronezh), CH. 4, 2017. S.17-26.

© Дружинин А.Н., Дружинина Н.А., 2018

Дружинин Александр Николаевич, кандидат технических наук, доцент, старший преподаватель кафедры радиотехники и антенно-фидерных устройств, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А, vaiu@mil.ru

Дружинина Наталия Александровна, электроник кафедры радиотехники и антенно-фидерных устройств, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А, vaiu@mil.ru