



УДК 517.958; 533.6.011:51
ГРНТИ 27.35.47

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА ПО ПОГЛОЩАЮЩИМ КАНАЛАМ МЕТОДОМ ФУНКЦИИ ГРИНА

*И.Л. БАТАРОНОВ, доктор физико-математических наук, профессор
ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)
В.В. ПЕШКОВ, доктор технических наук, профессор
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», (г. Воронеж)
В.Ф. СЕЛИВАНОВ, доктор технических наук, профессор
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», (г. Воронеж)
А.И. СТРЫГИН
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», (г. Воронеж)*

Методом функции Грина построена модель теплопереноса по поглощающему каналу, в рамках которой исследована неустойчивость решения задачи теплопереноса по поглощающему каналу в условиях развития топочимических экзотермических реакций и радиационного охлаждения. Найдены асимптотические выражения для устойчивого и неустойчивого решений. Установлены условия появления неустойчивости.

Ключевые слова: моделирование; теплоперенос; функция Грина; нелинейные эффекты.

MODELING HEAT AND MASS TRANSFER THROUGH ABSORBING CHANNELS BY THE GREEN'S FUNCTION METHOD

*I.L. BATARONOV, Doctor of physico-mathematical science, Professor
MESC AF "N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy" (Voronezh)
V.V. PESHKOV, Doctor of technical science, Professor
"Voronezh State Technical University" (Voronezh)
V.F. SELIVANOV, Doctor of technical science, Professor
"Voronezh State Technical University", (Voronezh)
A.I. STRYGIN
"Voronezh State Technical University", (Voronezh)*

By the method of Green's function, a model of heat and mass transfer through a swallowing channel is constructed; the instability of the solution of the heat and mass transfer problem through a swallowing channel is studied under conditions of development of topochimical exothermic reactions and radiation cooling. Asymptotic expressions for stable and stable solutions are found. Conditions for the appearance of instability are established.

Keywords: modelling, heat mass transfer, heat explosion, nonlinear effects.

Введение. В работах [1–3] развивались эффективные модели и алгоритмы решения задачи переноса газа с поглощением, формирующим вакуумированную зону [4, 5], однако рассматривались только изотермические условия без учета теплового эффекта топочимических реакций. Учет теплопереноса при действии нелинейного источника поглощения [6, 7] показывает возможность проявления различных нестационарных явлений.



В настоящей работе рассматривается задача тепломассопереноса по поглощающим каналам при действии нелинейного источника тепла и радиационного механизма охлаждения и устанавливаются формы и условия проявления нелинейных эффектов. Для построения и исследования модели используется метод функций Грина.

Формулировка математической модели.

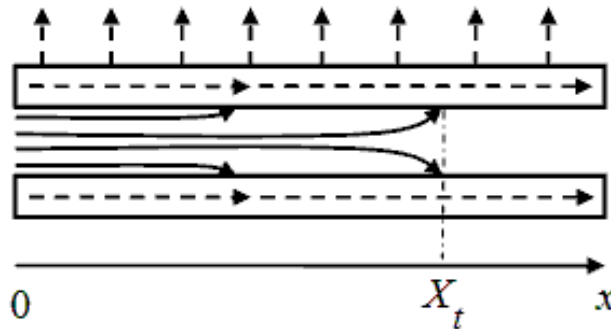


Рисунок 1 – Схема массопереноса (сплошные линии) и теплопереноса (пунктирные линии) вдоль канала

Задача тепломассопереноса по каналу постоянного сечения в условиях поглощения стенками канала транспортного агента в результате экзотермических топокхимических реакций описывается системой уравнений [1, 6, 7]

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{lK(\theta)}{DS\sqrt{t-T_x}}, & 0 < x < X_t, t > T_x \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{l \Delta h K(\theta)}{S_0 C \sqrt{t-T_x}} \eta(X_t - x) - \frac{\alpha l_0}{S_0 C} (\theta - \theta_1) \end{cases} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} n(X_t) = 0; \quad \frac{\partial n}{\partial x}(X_t) = 0, \quad \frac{n(0) - n_0}{\lambda} = \frac{\partial n}{\partial x}(0), \\ \theta(\infty, t) = \theta_1; \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $n(x;t)$ – атомная концентрация газа в полости, D – кнудсеновский коэффициент диффузии, K – константа скорости поглощения газа стенками полости, X_t – координата границы автовакуумированной зоны, T_x – функция, обратная к $x = X_t$, индекс обозначает функциональную зависимость от переменной, а зависимость от времени в первом уравнении в (1), в соответствии с квазистационарным приближением, является параметрической, θ – температура стенки, θ_1 – температура среды, C и χ – удельная теплоемкость и коэффициент температуропроводности материала стенки, имеющей площадь сечения S_0 , Δh – атомная энтальпия топокхимической реакции, α – коэффициент теплоотдачи с поверхности стенки, l_0 – длина периметра, с которой происходит теплоотдача, $\eta(x)$ – единичная ступенчатая функция, n_0 – остаточная концентрация газа в буферной зоне форвакуумного насоса, λ – характеристика гидро-



динамического сопротивления вакуумной трубки, имеющая размерности длины и выражающаяся в виде [8]:

$$\lambda = \frac{8k}{\pi} l_T \frac{a^2 h^2}{d^3 (a + h)}. \quad (3)$$

Здесь h – высота канала, a – ширина канала, k – число каналов, выходящих к месту присоединения вакуумопроводной трубки, имеющей диаметр d и длину l_T .

Зависимость константы скорости от температуры может быть представлена в аррениусовском виде [4, 5]:

$$K(\theta) = K_0 \varphi(\theta), \quad \varphi(\theta) = \exp\left(\frac{\theta_0(\theta - \theta_1)}{\theta_1 \theta}\right), \quad (4)$$

где θ_0 – активационный барьер в температурных единицах, K_0 – предэкспонента.

Перейдем в (1), (2) к безразмерным переменным

$$t = t_c \tau, \quad x = x_c \xi, \quad n = n_0 z, \quad \theta = \theta_a \Theta + \theta_1, \quad T_x = t_c \tau_0, \quad X_t = x_c \xi_0. \quad (5)$$

В итоге с учетом (4) и условия $(\theta - \theta_1) \cdot \theta_1$ получим

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = \frac{x_c^2 l K_0}{D S n_0 \sqrt{t_c}} \cdot \frac{e^{\frac{\theta_0 \theta_a \Theta}{\theta_1^2}}}{\sqrt{\tau - \tau_0}}, & 0 < \xi < \xi_0, \quad \tau > \tau_0 \\ \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\chi t_c}{x_c^2} \cdot \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \frac{l \Delta h K_0 \sqrt{t_c}}{S_0 C \theta_a} \cdot \frac{e^{\frac{\theta_0 \theta_a \Theta}{\theta_1^2}}}{\sqrt{\tau - \tau_0}} \eta(\xi_0 - \xi) - \frac{\alpha l_0 t_c}{S_0 C} \cdot \Theta \end{cases},$$

$$z(\xi_0) = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial \xi}(\xi_0) = 0, \quad z(0) - 1 = \frac{\lambda}{x_c} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi}(0),$$

$$\Theta(\infty, t) = 0; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}(0, t) = 0.$$

В этих выражениях формируется шесть безразмерных отношений и имеется три масштабных параметра. Имея в виду рассмотрение сопряженной задачи тепломассопереноса, определим масштабные параметры условиями:

$$\frac{\chi t_c}{x_c^2} = 1, \quad \frac{x_c^2 l K_0}{D S n_0 \sqrt{t_c}} = 1, \quad \frac{l \Delta h K_0 \sqrt{t_c}}{S_0 C \theta_a} = 1.$$

Отсюда получаем характеристические значения переменных:



$$t_c = \left(\frac{DSn_0}{\chi l K_0} \right)^2 = \frac{t_s}{Le^2} \quad (6)$$

– характеристическое время сравнения пространственных масштабов диффузионного $L_D = \sqrt{DSn_0 \sqrt{t} / (lK_0)}$ и температурного $L_T = \sqrt{\chi t}$ полей. При $t < t_c$ (переходной режим) размер и скорость движения диффузионного поля значительно превышает глубину температурного, поэтому процесс можно считать адиабатическим, а при $t > t_c$ (регулярный режим) диффузионный процесс можно считать квазистатическим для тепловой задачи. Это время можно сравнить с характеристическим временем, определяющим формирование автовакуумированной зоны без учета влияния теплового эффекта реакции $t_s = (Sn_0 / lK_0)^2$ [1];

$$x_c = \sqrt{\chi t_c} = \frac{DSn_0}{\sqrt{\chi l K_0}} = \frac{x_s}{\sqrt{Le}} \quad (7)$$

– характеристическая длина температурного/диффузионного поля вдоль канала в момент времени t_c . Его также целесообразно сравнить с характеристической длиной, соответствующей минимальной длине канала, при которой образуется вакуумированная зона $x_s = \sqrt{Dt_s}$ [1];

$$\theta_a = \frac{l \Delta h K_0}{S_0 C} \sqrt{t_c} = \frac{SD}{S_0 \chi} \frac{n_0 \Delta h}{C} \quad (8)$$

– адиабатическое повышение температуры стенки в результате топокхимической реакции за время t_c .

Отметим, что в приведенных выражениях присутствует отношение $Le = \chi / D$, являющееся аналогом числа Льюиса, однако составленное из материальных констант, относящихся к разным средам (газовой и твердофазной). Поэтому обычное заключение о большой величине этого параметра для твердой фазы и близости его к единице для газовой в данном случае становится неприменимым. Отметим, что для рассматриваемой системы характерное значение этого числа составляет $\sim 10^{-5}$. В силу малости этого параметра величины x_s , t_s пренебрежимо малы, что обосновывает использование квазистационарного приближения для массопереноса.

Остальные выражения преобразованных уравнений и граничных условий формируют критериальные отношения рассматриваемой задачи:

$$P_1 = \frac{\alpha l_0 t_c}{S_0 C}, \quad P_2 = \frac{\theta_0 \theta_a}{\theta_1^2} = \theta_a \frac{\partial \ln K}{\partial \theta}, \quad \lambda^* = \frac{\lambda}{x_c}. \quad (9)$$

Первый параметр является безразмерным коэффициентом теплоотдачи и представляет собой отношение характерной длительности переходного режима t_c и постоянной времени охлаждения теплоотдачей $t_\alpha = S_0 C / (\alpha l_0)$. Второй параметр отражает интенсивность влияния изменения температуры на изменение скорости топокхимической реакции. Третий параметр определяет характер граничного условия в переходном



режиме: при $\lambda^* > 1$ – фиксированный поток (граничное условие 2 рода), при $\lambda^* < 1$ – заданная концентрация (граничное условие 1 рода).

В итоге получаем систему из двух сопряженных уравнений тепломассопереноса в приведенной форме со слабо сингулярным стоком массы на свободной границе в одном уравнении и соответствующим источником тепла во втором уравнении:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = \frac{e^{P_2 \Theta}}{\sqrt{\tau - \tau_0(\xi)}}, & 0 < \xi < \xi_0(\tau), \\ \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \frac{e^{P_2 \Theta}}{\sqrt{\tau - \tau_0(\xi)}} \eta(\tau - \tau_0(\xi)) - P_1 \Theta, \end{cases} \quad (10)$$

$$z(\xi_0) = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial \xi}(\xi_0) = 0, \quad \frac{z(0) - 1}{\lambda^*} = \frac{\partial z}{\partial \xi}(0),$$

$$\Theta(\infty, t) = 0; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}(0, t) = 0.$$

Данная система содержит три управляющих параметра P_1, P_2, λ^* .

Для качественного исследования характера решения, аналогично использованному в [6, 7], примем следующие упрощения (рисунок 2):

- поглощение газа происходит однородно во всей зоне, для этого:
- температуру Θ в плотности источников положим равной характеристическому значению $\Theta_0(\tau)$ в пределах зоны поглощения газа $0 < \xi < \xi_0(\tau)$;
- запаздыванием поглощения $\tau_0(\xi)$ пренебрегаем;
- температура среды θ_1 постоянна.

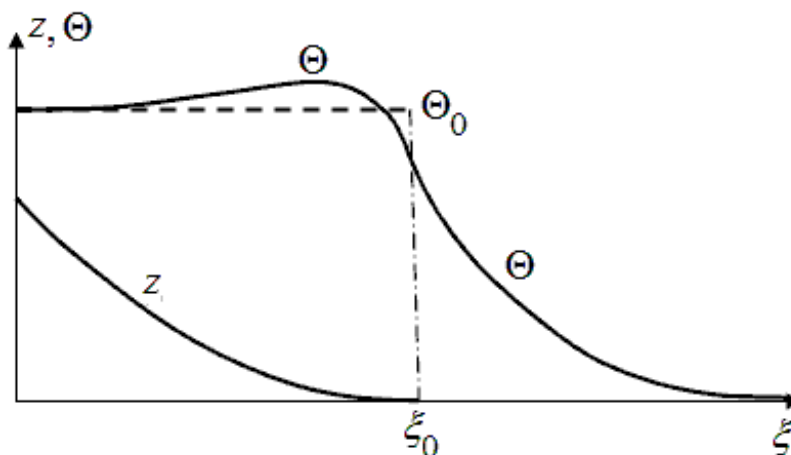


Рисунок 2 – Качественная картина распределения температурного и концентрационного полей вдоль канала



В результате вместо (10) получаем упрощенную модель:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = \frac{e^{P_2 \Theta_0(\tau)}}{\sqrt{\tau}}, & 0 < \xi < \xi_0(\tau), \\ \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \frac{e^{P_2 \Theta_0(\tau)}}{\sqrt{\tau}} \eta(\xi_0(\tau) - \xi) - P_1 \Theta, \end{cases} \quad (11)$$

$$z(\xi_0) = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial \xi}(\xi_0) = 0, \quad \frac{z(0) - 1}{\lambda^*} = \frac{\partial z}{\partial \xi}(0),$$

$$\Theta(\infty, t) = 0; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}(0, t) = 0.$$

Удобством данной модели является то, что первое уравнение системы (11) не зависит от второго и образует самостоятельную задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = \frac{e^{P_2 \Theta_0(\tau)}}{\sqrt{\tau}}, & 0 < \xi < \xi_0(\tau), \\ \frac{z(0) - 1}{\lambda^*} = \frac{\partial z}{\partial \xi}(0), & z(\xi_0) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \xi}(\xi_0) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Решение этой задачи определяет распределение концентрации газа в диффузионной зоне и закон движения фронта зоны:

$$\begin{aligned} z(\xi; \tau) &= \frac{1}{2} (\xi - \xi_0)^2 \frac{e^{P_2 \Theta_0(\tau)}}{\sqrt{\tau}}, \quad \xi < \xi_0, \\ \xi_0(\tau, \Theta_0) &= \sqrt{\lambda^{*2} + 2\sqrt{\tau} e^{-P_2 \Theta_0}} - \lambda^* = \frac{2\sqrt{\tau} e^{-P_2 \Theta_0}}{\sqrt{\lambda^{*2} + 2\sqrt{\tau} e^{-P_2 \Theta_0}} + \lambda^*}. \end{aligned} \quad (13)$$

Согласно решению (13), квазистационарный профиль концентрации z получается параболическим. Для постоянной температуры решение (13) согласуется с приведенным в [1] и обобщает его на случай переменной температуры.

При решении второго уравнения функцию $\Theta_0(\tau)$ будем считать заданной, тогда получаем параболическую задачу на полупрямой:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} - P_1 \Theta + \frac{e^{P_2 \Theta_0(\tau)}}{\sqrt{\tau}} \eta(\xi_0(\tau, \Theta_0(\tau)) - \xi), \quad (14)$$

$$\Theta(\infty, t) = 0; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}(0, t) = 0.$$



Построим ее решение с использованием функции Грина для уравнения теплопроводности на полупрямой при граничном условии второго рода [9], что дает распределение температуры по стенке канала в виде:

$$\Theta(\xi, \tau) = \int_0^{\tau} \frac{e^{-P_1(\tau-\tau') + P_2\Theta_0(\tau')}}{2\sqrt{\pi(\tau-\tau')}} \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau'}} \int_0^{\xi_0(\tau', \Theta_0(\tau'))} \left[e^{-\frac{(\xi-\xi')^2}{4(\tau-\tau')}} + e^{-\frac{(\xi+\xi')^2}{4(\tau-\tau')}} \right] d\xi'. \quad (15)$$

Выполняя здесь тривиальное интегрирование по переменной ξ' , получим:

$$\Theta(\xi, \tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau} e^{-P_1(\tau-\tau') + P_2\Theta_0(\tau')} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\xi + \xi_0(\tau', \Theta_0(\tau'))}{2\sqrt{(\tau-\tau')}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\xi - \xi_0(\tau', \Theta_0(\tau'))}{2\sqrt{(\tau-\tau')}} \right) \right] \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau'}}, \quad (16)$$

где $\operatorname{erf}(x)$ – функция ошибок.

Замыкающим условием для уравнения (16) является определение характеристической температуры. Поскольку тепловая длина для рассматриваемых времен значительно превышает размер зоны нагрева, то распределение температуры в этой зоне почти однородно и можно воспользоваться определением, дающим наиболее простое уравнение. Возьмем в качестве характеристической температуру в точке (рисунок 2), тогда из (16) получим уравнение

$$\Theta_0(\tau) = \int_0^{\tau} e^{-P_1(\tau-\tau') + P_2\Theta_0(\tau')} \operatorname{erf} \left(\frac{\xi_0(\tau', \Theta_0(\tau'))}{2\sqrt{(\tau-\tau')}} \right) \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau'}} \quad (17)$$

с функцией $\xi_0(\tau, \Theta_0)$ из выражения (13).

Уравнение (17) представляет собой нелинейное интегральное уравнение типа Вольтерра первого рода для величины перегрева стенки канала $\Theta_0(\tau)$, после нахождения которой движение фронта и распределение температуры сразу определяются выражениями (16), (13). Таким образом, в результате использования метода функции Грина первоначальная задача для функции нескольких переменных свелась к определению функции одной переменной.

Вследствие нелинейности уравнение (17) может быть решено только численно.

Разработка численного алгоритма решения уравнений модели. Для дискретизации уравнения (17) введем обозначения сетки времени (τ_i) и соответствующих массивов $\Theta_i = \Theta_0(\tau_i)$ и $\xi_i = \xi_0(\tau_i, \Theta_i)$ значений функций $\Theta_0(\tau)$ $\xi_0(\tau, \Theta_0)$. Ввиду нелинейности уравнения построение сетки будем осуществлять динамически.

Рассмотрим интеграл уравнения (17) на одном шаге по времени:

$$\Delta I_i = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} e^{-P_1(\tau-\tau') + P_2\Theta_0(\tau')} \operatorname{erf} \left(\frac{\xi_0(\tau', \Theta_0(\tau'))}{2\sqrt{(\tau-\tau')}} \right) \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau'}} \quad (18)$$

Основной вклад в интеграл (17), определяющий текущее значение $\Theta_0(\tau)$, дает окрестность верхнего предела интегрирования, в которой функция $\operatorname{erf} \left(\frac{1}{2} \xi_0 / \sqrt{(\tau-\tau')} \right)$



резко изменяется за счет наличия в знаменателе аргумента выражения $\sqrt{(\tau - \tau')}$. Для учета этого обстоятельства воспользуемся методом выделения особенности [10], для чего аппроксимируем интеграл (18) по формуле правых прямоугольников во всех подынтегральных функциях, за исключением указанного выражения:

$$\Delta I_i = \frac{e^{-P_1(\tau_n - \tau_i) + P_2 \Theta_i}}{\sqrt{\tau_i}} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \operatorname{erf} \left(\frac{\xi_i}{2\sqrt{(\tau_n - \tau')}} \right) d\tau' \quad (19)$$

Использование именно формулы правых прямоугольников связано с тем, что в итоге получается чисто неявная схема, обладающая хорошей устойчивостью [10], что важно для рассматриваемой нелинейной задачи.

Выполняя далее интегрирование в формуле (19), получим аппроксимацию, корректно учитывающую особенность подынтегрального выражения:

$$\Delta I_i = \frac{e^{-P_1(\tau_n - \tau_i) + P_2 \Theta_i}}{\sqrt{\tau_i}} \frac{\xi_i^2}{4} \left[D \left(\frac{\xi_i}{2\sqrt{(\tau_n - \tau_{i-1})}} \right) - D \left(\frac{\xi_i}{2\sqrt{(\tau_n - \tau_i)}} \right) \right], \quad (20)$$

где τ_n – текущее значение переменной времени и обозначено

$$D(x) = \left(\frac{1}{x^2} + 2 \right) \operatorname{erf}(x) + \frac{2}{x\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \quad (21)$$

В частности, для последнего интервала дискретизации $(\tau_{n-1}; \tau_n)$ выражение (20) принимает вид:

$$\Delta I_n = \frac{\varepsilon e^{P_2 \Theta_n}}{\sqrt{\tau_{n-1} + \varepsilon}} G \left(\frac{\xi_0(\tau_{n-1} + \varepsilon, \Theta_n)}{2\sqrt{\varepsilon}} \right) \quad (22)$$

Здесь ε – очередной динамически выбираемый шаг по времени, а

$$G(x) = \left(1 + 2x^2 \right) \operatorname{erf}(x) + \frac{2x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} - 2x^2 \quad (23)$$

Используя аппроксимации (22) и (20) при дискретизации уравнения (19), получим разностную схему для решения уравнения (19):

$$\Theta_n = \frac{\varepsilon e^{P_2 \Theta_n}}{\sqrt{\tau_{n-1} + \varepsilon}} G \left(\frac{\xi_0(\tau_{n-1} + \varepsilon, \Theta_n)}{2\sqrt{\varepsilon}} \right) + \Theta'_{n-1}, \quad (24)$$

где введено обозначение для суммы, не зависящей от текущей переменной Θ_n :

$$\Theta'_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{e^{-P_1(\tau_{n-1} + \varepsilon - \tau_i) + P_2 \Theta_i}}{\sqrt{\tau_i}} \frac{\xi_i^2}{4} \left[D \left(\frac{\xi_i}{2\sqrt{(\tau_{n-1} + \varepsilon - \tau_{i-1})}} \right) - D \left(\frac{\xi_i}{2\sqrt{(\tau_{n-1} + \varepsilon - \tau_i)}} \right) \right] \quad (25)$$



Схема (24) определяет эволюционный алгоритм решения уравнения (19) при начальном значении $\Theta_0 = 0$.

Условием выбора текущего шага по времени является малость изменения переменной Θ_n на одном шаге. Принимая в качестве величины такого изменения первое слагаемое в правой части (24), с учетом асимптотической формулы $G(x) = 4x/\sqrt{\pi}$ при $x \rightarrow 0$, вытекающей из (23), получим:

$$\varepsilon = \pi\tau_{n-1} \left(\frac{q\Theta_{n-1}}{4\xi_0(\tau_{n-1}, \Theta_{n-1})} e^{-P_2\Theta_{n-1}} \right)^2 \quad (26)$$

где $q \Theta$ – параметр динамического выбора шага. После задания ε имеем $\tau_n = \tau_{n-1} + \varepsilon$.

Нелинейное уравнение (24) может решаться простым итерационным методом, определяемым формой записи уравнения (24). Однако условие сходимости метода накладывает дополнительное жесткое ограничение на шаг (28) и фактически приводит к необходимости вести расчет с экспоненциально малым шагом. Поэтому для решения уравнения (24) целесообразно использование быстро сходящегося устойчивого метода Ньютона, который приводит к следующему итерационному алгоритму:

$$\Theta_n^{(s+1)} = \Theta_n^{(s)} - \frac{\varepsilon e^{P_2\Theta_n^{(s)}} G\left(\frac{\xi_0(\tau_n, \Theta_n^{(s)})}{2\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sqrt{\tau_n} (\Theta_{n-1}' - \Theta_n^{(s)})}{\varepsilon P_2 e^{P_2\Theta_n^{(s)}} G\left(\frac{\xi_0(\tau_n, \Theta_n^{(s)})}{2\sqrt{\varepsilon}}\right) + \varepsilon e^{P_2\Theta_n^{(s)}} \frac{\partial G}{\partial \Theta} \left(\frac{\xi_0(\tau_n, \Theta_n^{(s)})}{2\sqrt{\varepsilon}}\right) - \sqrt{\tau_n}} \quad (27)$$

Здесь s – номер итерации, и начальное приближение $\Theta_n^{(0)} = \Theta_{n-1}$.

Формулы (23) – (27) определяют алгоритм численного решения уравнения (17).

Исследование модели.

Результат решения уравнения (17) и вычисления функции (13) по алгоритму (26), (27) для двух наборов параметров P_1, P_2, λ приведены на рисунке 3. Из рисунка видно существование двух типов решения: устойчивого (S), характеризующегося монотонным движением фронта ξ_0 и уменьшением перегрева Θ_0 с течением времени, и неустойчивого (N), при котором наблюдается значительное повышение перегрева и «обратное» движение фронта со схлопыванием зоны поглощения. При этом временной интервал существования решения N ограничен, после которого решение переходит в тип S (рисунок 3).

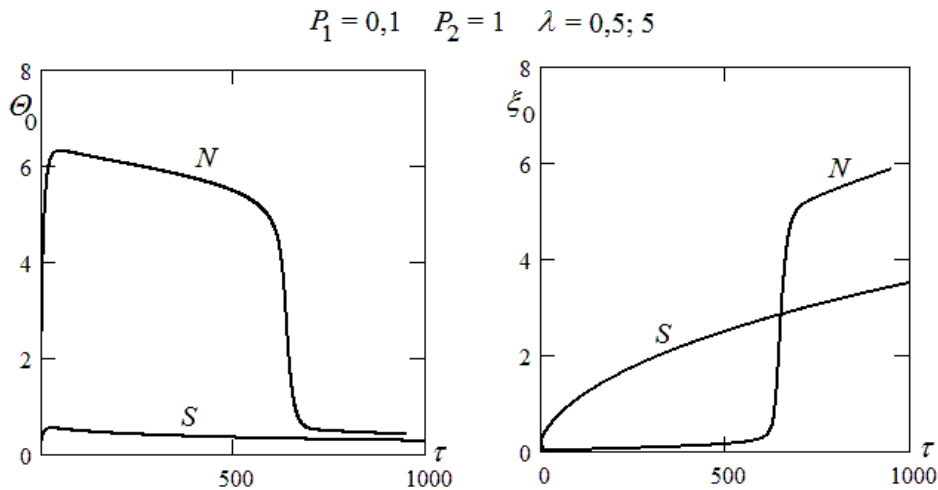


Рисунок 3 – Результаты численного решения уравнения (17)
для двух наборов значений параметров:
S: $P_1=0,1, P_2=1, \lambda=5$; N: $P_1=0,1, P_2=1, \lambda=0,5$

Для исследования этих решений найдем асимптотики решений уравнения (17) по методу Лапласа [11]. Для этого заметим, что интеграл в (17) содержит две резко меняющиеся функции, достигающие наибольшего значения на верхнем пределе, причем для функции $\text{erfc}(\xi/\sqrt{\tau-\tau'})$ производная в этой точке имеет нуль бесконечного порядка. Тогда, воспользовавшись функцией $\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x)$, перепишем уравнение (17) в виде:

$$\Theta_0(\tau) = \int_0^\tau e^{-P_1(\tau-\tau')+P_2\Theta_0(\tau')} \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau'}} - \int_0^\tau e^{-P_1(\tau-\tau')+P_2\Theta_0(\tau')} \text{erfc}\left(\frac{\xi_0(\tau', \Theta_0(\tau'))}{2\sqrt{(\tau-\tau')}}\right) \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau'}} \quad (28)$$

Считая функцию $\Theta_0(\tau)$ медленно меняющейся (рисунок 2), сразу находим асимптотическую оценку первого интеграла по формуле для подынтегральной функции, имеющей экстремум в граничной точке [11]:

$$\int_0^\tau e^{-P_1(\tau-\tau')+P_2\Theta_0(\tau')} \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau'}} \approx \frac{e^{P_2\Theta_0(\tau)}}{P_1\sqrt{\tau}} \quad (29)$$

Во втором интеграле показательная функция возрастает с увеличением τ' , а функция erfc – убывает, так что имеется точка внутреннего максимума. Вследствие резкого изменения функции erfc эта точка близка к τ , в окрестности которой аргумент erfc стремится к бесконечности, поэтому воспользуемся асимптотическим разложением

$$\text{erfc}(x) \approx \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}, \quad x \rightarrow \infty,$$

с помощью которого перепишем второй интеграл в (28) в виде



$$I = \int_0^{\tau} e^{-P_1(\tau-\tau') + P_2\Theta_0(\tau') - \frac{\xi_0^2(\tau', \Theta_0(\tau'))}{4(\tau-\tau')}} \frac{2\sqrt{(\tau-\tau')}}{\sqrt{\pi}\xi_0(\tau', \Theta_0(\tau'))} \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau'}}. \quad (30)$$

Метод Лапласа для внутренней точки максимума x_m дает [11]

$$\int_a^b f(x)e^{S(x)} dx \approx \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(x_m)}} f(x_m)e^{S(x_m)}. \quad (31)$$

Считая в интеграле (30) ξ_0, Θ_0 медленно меняющимися функциями, положим

$$S(x) = -P_1x - \frac{\xi_0^2}{4x}, \quad x = \tau - \tau'. \quad (32)$$

Из (32) получаем, что

$$x_m = \frac{\xi_0}{2\sqrt{P_1}}, \quad S(x_m) = -\xi_0\sqrt{P_1}, \quad S''(x_m) = -\frac{4P_1^{3/2}}{\xi_0}. \quad (33)$$

Используя результаты (33) в формуле (31), с помощью последней найдем для интеграла (30) асимптотическую оценку

$$I \approx \frac{e^{P_2\Theta_0(\tau) - \sqrt{P_1}\xi_0(\tau, \Theta_0(\tau))}}{P_1\sqrt{\tau}}. \quad (34)$$

Подставляя формулы (29) и (34) в равенство (28), окончательно получим:

$$\Theta_0(\tau) = \frac{e^{P_2\Theta_0(\tau)}}{P_1\sqrt{\tau}} \left(1 - e^{-\sqrt{P_1}\xi_0(\tau, \Theta_0(\tau))}\right). \quad (35)$$

Это уравнение совместно с (13) неявно определяет асимптотические решения. Для нахождения их явного вида рассмотрим два предельных случая.

I. Режим заданной концентрации газа (граничное условие 1 рода). Пусть

$$\frac{2\sqrt{\tau}e^{-P_2\Theta_0}}{\lambda^{*2}} = 1. \quad (36)$$

Тогда из выражения (13) получаем $\xi_0 \approx \sqrt{2\sqrt{\tau}e^{-P_2\Theta_0}}$, и $\sqrt{P_1}\xi_0 = 1$, так что $1 - e^{-\sqrt{P_1}\xi_0} \approx 1$, и уравнение (35) преобразуется к виду

$$\Theta_0(\tau) = \frac{e^{P_2\Theta_0(\tau)}}{P_1\sqrt{\tau}}. \quad (37)$$



Это уравнение задает неявную зависимость $\Theta_0(\tau)$ в рассматриваемом пределе. При этом с ростом переменной τ имеет место $\Theta_0(\tau) \rightarrow 0$, поэтому можно положить $e^{P_2\Theta_0(\tau)} \approx 1$, и уравнение (37) имеет асимптотическое решение вида

$$\Theta_0(\tau) \doteq \frac{1}{P_1\sqrt{\tau}}. \quad (38)$$

Эта асимптотика соответствует решению типа *S*. Отметим, что оно не зависит от параметра нелинейности P_2 и определяется интенсивностью теплоотдачи P_1 .

II. Режим заданного потока (граничное условие 2 рода). В противоположном пределе

$$\frac{2\sqrt{\tau}e^{-P_2\Theta_0}}{\lambda^{*2}} = 1 \quad (39)$$

из равенства (13) получаем, что $\xi_0 \approx \sqrt{\tau}e^{-P_2\Theta_0} / \lambda^{*2}$ – экспоненциально малая величина, так что $1 - e^{-\sqrt{P_1}\xi_0} \approx \sqrt{P_1}\xi_0 = \sqrt{P_1}\sqrt{\tau}e^{-P_2\Theta_0} / \lambda^{*2}$. Учитывая это выражение в уравнении (35), получим асимптотическое решение

$$\Theta_0(\tau) \doteq \frac{1}{\lambda^*\sqrt{P_1}}, \quad (40)$$

соответствующее нулевому приближению для решения типа *N*. Одновременно выражение (40) задает максимальную величину перегрева, которая вообще может иметь место в данной задаче. Опять отметим, что данное решение не зависит от параметра P_2 .

III. Переходной режим. Из условий (36), (39) видно, что с течением времени условие (39) обязательно сменится на (36), то есть решение типа *N* перейдет в *S*. Тогда время перехода может быть найдено из промежуточного между (36), (39) условия:

$$\frac{2\sqrt{\tau}e^{-P_2\Theta_0}}{\lambda^{*2}} = 1. \quad (41)$$

Это условие соответствует моменту времени при котором, согласно (13) $\xi_0 \approx \lambda^*(\sqrt{2}-1)$, а согласно (41) $\frac{e^{P_2\Theta_0}}{\sqrt{\tau}} = \frac{2}{\lambda^{*2}}$. Тогда из уравнения (35) находим температуру в этот момент времени

$$\Theta_0 = \frac{2}{P_1\lambda^{*2}} \left(1 - e^{-\sqrt{P_1}\lambda^*(\sqrt{2}-1)} \right),$$

подставляя которую в равенство (41), найдем время существования решения типа *N*:



$$\tau_N = \frac{\lambda^{*4}}{4} \exp\left(\frac{4P_2}{P_1\lambda^{*2}}\left(1 - e^{-\sqrt{P_1}\lambda^*(\sqrt{2}-1)}\right)\right). \quad (42)$$

Критические значения параметров, определяющие появление конкретного решения, не могут быть найдены аналитически, так как определяются решением в начальный период времени. Вычислительный эксперимент позволил построить карты режимов массопереноса в плоскости параметров (P_1, P_2) для различных значений параметра λ^* , которые сведены на рисунке 4.

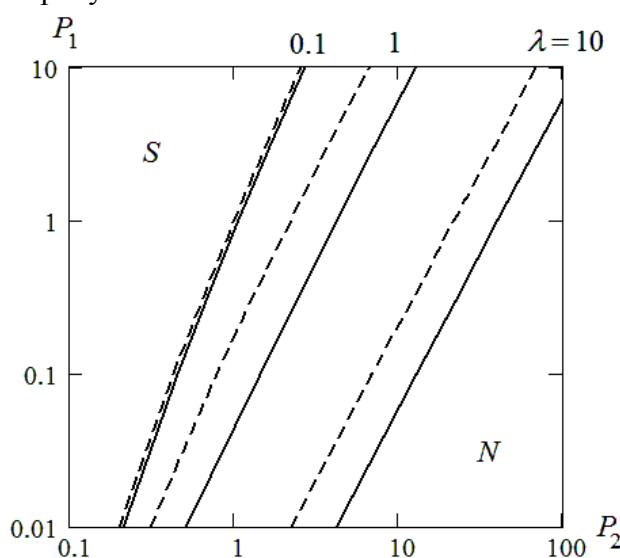


Рисунок 4 – Карты режимов массопереноса в каналах с поглощением

Штриховой линией показано условие формирования переходного режима, то есть появление на зависимости $\xi_0(\tau)$ участка обратного движения фронта. Сплошной линией показаны условия появления решений типа (N) .

Выводы. Установлено наличие решений двух типов задачи тепломассопереноса в поглощающих каналах в условиях развития экзотермических топочимических реакций. Одно из решений характеризуется появлением области перегрева конструкции, существующей в течение ограниченного промежутка времени. Найдены критериальные соотношения задачи, в зависимости от которых установлены условия реализации решений, асимптотический вид решений, время существования перегрева, а также максимально возможная величина перегрева. Полученные результаты позволяют прогнозировать возможность появления нелинейного теплового эффекта при изготовлении и эксплуатации устройств из поглощающих материалов, а также управлять процессом путем выбора безопасных условий, не приводящих к тепловым эффектам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Батаронов И.Л., Петренко В.Р., Пешков В.В. Физико-математическое моделирование течения газа по технологическим зазорам переменного сечения при диффузионной сварке // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2006. Т.2, №8. С. 5–12.
2. Моделирование массопереноса в поглощающей вакуумируемой полости при нагреве / И.Л. Батаронов и др. // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2014. Т. 10, № 1. С. 66–70.



3. Батаронов И.Л., Селиванов В.Ф., Селиванова А.В. Интегро-дифференциальная параболическая модель массопереноса в поглощающей пористой среде // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2014. Т. 10, № 4. С. 74–77.
4. Диффузионная сварка титана и его сплавов / А.В.Бондарь, В.В.Пешков, Л.С.Киреев, В.В.Шурупов. Воронеж: Изд. ВГУ, 1998. 256 с.
5. Kireev L.S., Peshkov V.V. Joining Titanium to steel // Welding and Surfacing reviews. 1998. V.11, Pt. 2. P. 1–127.
6. Исследование устойчивости решения сопряженной параболической задачи с сингулярным поглощением на свободной границе / И.Л. Батаронов и др. // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ-2012): материалы V международной конференции. Воронеж, 2012. С. 33–35.
7. Качественное исследование решения сопряженной задачи тепломассопереноса в каналах с поглощающими стенками / А.И. Стрыгин и др. // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ–2015): Сборник трудов VIII международной конференции. Воронеж, 2015. С. 350–353.
8. Моделирование вакуумирования межоболочковых полостей тонкостенных слоистых конструкций / А.И. Стрыгин и др. // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2013. Т. 9, № 5.1. С. 106–110.
9. Будак Б.М., Тихонов А.А., Самарский А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1979. 687 с.
10. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
11. Федорюк М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1987. – 544 с.

REFERENCES

1. Bataronov I.L., Petrenko V.R., Peshkov V.V. Physico – mathematical modeling of gas flow through technical gaps of variable cross-section during diffusion welding // Vestnik Voronezh State Technical University. 2006. T.2, №8. P. 5–12.
2. Simulation of mass transfer in an absorbing vacuum cavity under heating / I.L. Bataronov and etc. // Vestnik Voronezh State Technical University. 2014. T.10, №1, P.66–70.
3. Bataronov I.L., Selivanov V.F., Selivanov A.V. Integro-differential parabolic mass transfer model in an absorbent porous medium // Vestnik Voronezh State Technical University. 2014. T.10, №4, P. 74–77.
4. Diffusion welding of titanium and its alloys / A.V. Bondar', V.V. Peshkov, L.S Kireev, V.V. Shurupov. Voronezh: VSU, 1998, 256 p.
5. Kireev L.S., Peshkov V.V. Joining Titanium to steel // Welding and Surfacing reviews. 1998. V.11, Pt. 2. P. 1–127.
6. Investigation of the stability of the solution of the conjugate parabolic problem with singular absorption on a free boundary / I.L Bataronov and etc. // Modern problem of applied mathematics, theory of control and mathematical modeling: material V of the international conference, 2012. P. 33–35.
7. A qualitative study of the solution of the conjugate heat and mass transfer problem in channels with absorbing / A.I. Strygin and etc // Modern methods of applied mathematics, control theory and computer technologies. Collection of proceedings VIII of an international conference. Voronezh. 2015. P. 350–353.
8. Modeling of evacuation of intershell cavities of thin-walled layered structures / A.I. Strygin and etc // Vestnik Voronezh State Technical University. 2013. T. 9, № 5.1. P. 106–110.



9. Budak B.M., Tihonov A.A., Samarskiy A.N. Collection of problems in mathematical physics. M.: Science, 1979. 687 p.

10. Kalitkin N.N., Numerical methods. M.: Science, 1978. 512 p.

11. Fedoryuk M.V. Asymptotics: Integrals and series. – M.: Science, 1987. – 544 p.

© Батаронов И.Л., Пешков В.В., Селиванов В.Ф., Стрыгин А.И., 2017

Батаронов Игорь Леонидович, доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник научно-исследовательского центра (проблем применения, обеспечения и управления авиацией Военно-воздушных сил), Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А, vaiu@mil.ru

Пешков Владимир Владимирович, доктор технических наук, профессор ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», г. Воронеж

Селиванов Владимир Федорович, доктор технических наук, профессор ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», г. Воронеж

Стрыгин Александр Иванович, научный сотрудник ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», г. Воронеж