УДК 519.633.6
ГРНТИ 27.31

АППРОКСИМАЦИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ, ЗАДАННЫХ НА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ГИДРОСЕТИ

А.В. ИВАНОВ, кандидат технических наук, доцент
ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)
В.В. ПРОВОТОРОВ, доктор физико-математических наук, профессор
ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)
О.Р. БАЛАБАН
ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)
И.В. ПРИХОДЬКО
ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)

Работа посвящена описанию конечномерных аналогов гидродинамических процессов с термальным и волновым эффектами в терминах разностных отношений и, как следствие, им соответствующих разностных схем с достаточно точными аппроксимациями. Представлены условия (необременительные в технической реализации), гарантирующие необходимую точность, устойчивость и сходимость.

Ключевые слова: гидродинамические процессы в гидросетях; разностные схемы; аппроксимация эллиптического оператора; аппроксимации эволюционных уравнений.

APPROXIMATION OF EVOLUTIONARY SYSTEM OF HYDRODYNAMIC PROCESSES DEFINED ON A SPATIAL HYDROSYSTEM

A.V. IVANOV, Candidate of technical science, Associate Professor
MESC AF "N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy" (Voronezh)
V.V. PROVOTOROV, Doctor of physico-mathematical science, Professor
MESC AF "N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy" (Voronezh)
O.R. BALABAN
MESC AF "N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy" (Voronezh)
I.V. PRIKHODKO
MESC AF "N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy" (Voronezh)

The paper is devoted to finite-demensional analogs of dynamic thermodynamic processes with thermal and wave effects in the relations of terms of difference and, as consequence, corresponding difference schemes with sufficiently exact ammoxime. Provisions are given (not necessary in the technical implementation), which quarantee the necessary accuracy, stability and convergence

Keywords: hydrodynamic processes in hydrosystems, difference schemes, approximations of an elliptic operator, approximations of evolution equations.

Введение. В технологических задачах прикладного характера особый интерес исследователей вызывают гидродинамические процессы, осложненные термальным эффектом, а именно, выделением (поглощением) энергии, синтезирующей явление формирования тепловых процессов и, как следствие, переноса теплоты по всем элементам гидросети при гидродинамическом процессе. На практике при транспортировке вязкой среды по гидросети это наблюдается в виде нагрева (охлаждения) гидросистемы. Последнее означает: необходимо учитывать неизотермическую составляющую при анализе гидродинамического процесса. Следует отметить также и наличие в гидросистеме волновых эффектов, порождаемых как начальными воздействиями (начальные условия заданы осциллирующими воздействиями), так и действием сил сопротивления на стенках каналов гидросистемы. В работе сделана попытка описать конечномерные аналоги указанного гидродинамического процесса в терминах разностных отношений и, как следствие, им соответствующих разностных схем с достаточно точными аппроксимациями.

Ниже используются обозначения, принятые в работах [1 – 8]: ребра γ сети $\Im$ имеют одинаковую длину и параметризованы отрезком $[0,1]$; $\partial\Im$ – множество граничных узлов ξ узлов сети $\Im$; $\Im_0$ – объединение всех ребер, не содержащих концевых точек; $\Im_T = \Im_0 \times (0,T)$ $(\bar{\Im} = \bar{\Im}_0 \times [0,T])$, $\partial\Im_T = \partial\Im \times (0,T)$. Другие обозначения вводятся по мере необходимости.

1. Дифференциальный оператор на звезде. Обозначим через $\Im$ граф-звезда и рассмотрим линейное многообразие $\Phi_\Im$ функций $y(x) \in C(\Im) \cap C^2[\Im]$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{k=1}^{m-1} y'(\pi/2)_{\gamma_k} = y'(\pi/2)_{\gamma_m} \tag{1}$$

в узле ξ. На функциях $y(x) \in \Re_\Im$, определим дифференциальный оператор $\Lambda_\Im$

$$\Lambda_\Im = -\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + q(x)y(x) \tag{2}$$

здесь $q(x) > 0,\ x \in \Im$. Областью определения оператора $\Lambda_\Im$ является линейное многообразие $\Phi_\Im \subset L^2(\Im)$, элементы $y(x)$ которого удовлетворяют граничным условиям

$$y'(0)_{\gamma_k} - h_k y(0)_{\gamma_k} = 0, \tag{3}$$

и

$$y'(\pi)_{\gamma_m} + Hy(\pi)_{\gamma_m} = 0. \tag{4}$$

Таким образом, оператор $\Lambda_\Im$ определен в пространстве $L^2(\Im)$.

Теорема 1. *Оператор $\Lambda_\Im$ симметричен в пространстве $L^2(\Im)$.*

Доказательство. Рассмотрим функции $\varphi(x), \psi(x) \in \Phi_\Im$ и функционал

$$(\Lambda_\Im\varphi,\psi) = \int_\Im (\Lambda_\Im\varphi)(x)\psi(x)dx = \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} (\Lambda_\Im\varphi)(x)_{\gamma_k}\,\psi(x)_{\gamma_k}\,dx,$$

Рассмотрим сумму в правой части отдельно и в соответствии с введенной параметризацией на графе $\Im$, получим:

$$\sum_{k=1}^{m}\int_{\gamma_k}(\Lambda_{\Im}\varphi)(x)_{\gamma_k}\psi(x)_{\gamma_k}dx=\sum_{k=1}^{m}\int_{\gamma_k}[-\varphi''(x)+q(x)\varphi(x)]_{\gamma_k}\psi(x)_{\gamma_k}dx=$$

$$=\sum_{k=1}^{m-1}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}[-\varphi''(x)+q(x)\varphi(x)]_{\gamma_k}\psi(x)_{\gamma_k}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[-\varphi''(x)+q(x)\varphi(x)]_{\gamma_k^{\pi}}\psi(x)_{\gamma_k^{\pi}}dx=$$

$$=\sum_{k=1}^{m-1}(-\varphi'(x)\psi(x)+\varphi(x)\psi'(x))_{\gamma_k}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(-\varphi'(x)\psi(x)+\varphi(x)\psi'(x))_{\gamma_k}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int_{\gamma_k}\varphi(x)_{\gamma_k}[-\psi''(x)+q(x)\psi(x)]_{\gamma_k}dx=\sum_{k=1}^{m_\xi}\int_{\gamma_k^{\xi}}\varphi(x)_{\gamma_k^{\xi}}(\Lambda_{\Im}\psi)(x)_{\gamma_k^{\xi}}dx=\int_{\Im}\varphi(x)(\Lambda_{\Im}\psi)(x)dx,$$

откуда вытекает утверждение теоремы.

Замечание. Теорема 1 имеет место, если изменить граничные условия (3), (4) на условия Дирихле:

$$\begin{aligned} y(0)_{\gamma_k}&=0,\ k=\overline{1,m-1},\\ y(\pi)_{\gamma_m}&=0, \end{aligned}\tag{5}$$

достаточно часто встречающиеся в прикладных задачах. Эллиптический оператор и его область определения, описываемые соотношениями (5), обозначим через $\Lambda_{\Im}^{0}$ и $\Phi_{\Im}^{0}$, соответственно.

Теорема 2. *Оператор* $\Lambda_{\Im}^{0}$ *является положительно определенным.*

Доказательство. Ортонормированная система собственных функций задачи

$$\Lambda_{\Im}^{0}u=\lambda u,$$

будет полной и образует базис в пространстве $L^2(\Im)$. При этом собственные значения оператора $\Lambda_{\Im}^{0}$ положительные ($q(x)>0$) и имеют предельные точки на бесконечности. Значит, имеет место неравенство

$$(\Lambda_{\Im}^{0}\varphi,\varphi)\geq\alpha(\Lambda_{\Im}^{0})(\varphi,\varphi),\quad \varphi\in\Phi_{\Lambda_{\Im}^{0}},$$

$\alpha(\Lambda_{\Im}^{0})-$ минимальное собственное значение оператора $\Lambda_{\Im}^{0}$, откуда и вытекает положительная определенность оператора $\Lambda_{\Im}^{0}$ [8].

2. Конечно-разностный аналог оператора $\Lambda_{\Im}^{0}$. Здесь и далее используются обозначения, принятые в монографии [1 – 2, 5]. Обозначим через $\{x_n^k\ (n=\overline{0,N})\}$ множество точек x_n^k, принадлежащих ребру $\gamma_k\subset\Im$: каждой точке x_n^k соответствует число $n\frac{\pi}{2N}$ $(n=\overline{0,N})$, началам и концам ребер γ_k $(k=\overline{1,m-1})$ соответствуют точки

СОДЕРЖАНИЕ

x_0^k и x_N^k, т.е. числа 0 и $\frac{\pi}{2}$, а началу и концу ребра γ_m – точки x_0^m и x_N^m, т.е. числа $\frac{\pi}{2}$ и π, соответственно.

Пусть $h=\frac{\pi}{nN}$. Множество точек $\{x_n^k\ (k=\overline{1,m},\ n=\overline{0,N})\}=\Im^h$ назовем сеткой звезды, величину $h-$ шагом сетки $\Im^h$. Обозначим через D^h множество точек сетки $\Im^h$, не совпадающих с граничными узлами звезды $\Im$, а через $\partial D^h=\Im^h$, D^h- множество точек сетки $\Im^h$, совпадающих с граничными узлами звезды $\Im$. Множество сеточных функций y^h с областью определения на D^h обозначим $\Phi_\Im^h$. Каждой функции $y\in\Phi_\Im^0$ сопоставим сеточную функцию (y^h): значение $(y^h)_n^k$ в точке $x_n^k\in D^h$ равно $y(x_n^k)$, $x_n^k\in\gamma_k\subset\Im$, $n=\overline{0,N}$, $k=\overline{0,m}$. Указанное сопоставление является линейным оператором, действующим из $\Phi_\Im^0$ в $\Phi_\Im^{0\,h}$; этот оператор назовем оператором проектирования функции y на сетку $\Im^h$ (введенный оператор аналогичен оператору проектирования на отрезке $[0,\pi]$ [1]).

Рассмотрим $\Lambda_\Im^0$, заданный на функциях $y\in\Phi_\Im^0$. Тогда функцию $\Lambda_\Im^0 y$ также можно спроектировать на сетку $\Im^h$, получив функцию $(\Lambda_\Im^0 y)^h$. Соответствие между y^h и $(\Lambda_\Im^0 y)^h$ будет линейным оператором, определенным на сетчатых функциях y^h, и этот оператор будет проекцией $\Lambda_\Im^0$ на сетку $\Im^h$, обозначим его через $\Lambda_\Im^{0\,h}$.

Введем разностные выражения

$$(\nabla^h y^h)_n^k=\frac{1}{h}((y^h)_n^k-(y^h)_{n-1}^k),\qquad (\Delta^h y^h)_n^k=\frac{1}{h}((y^h)_{n+1}^k-(y^h)_n^k),\tag{6}$$

тогда для сеточной функции $y^h\in\Phi_\Im^{0\,h}$ справедливы соотношения

$$(y^h)_N^k=(y^h)_N^m,\ k=\overline{1,m-1},\qquad \sum_{k=1}^{m-1}((y^h)_N^k-(y^h)_{N-1}^k)=(y^h)_1^m-(y^h)_0^m).\tag{7}$$

Оператор $\Lambda_\Im^{0h}$ на функциях $y^h\in\Phi_\Im^{0\,h}$ имеет представление

$$\underset{(n=\overline{1,N-1},k=\overline{1,m})}{(\Lambda_\Im^{0h}y^h)_N^k}=-(\Delta^h\nabla^h y^h)_N^k+(q^h)_N^k(y^h)_N^k= =-\frac{1}{h^2}((y^h)_{n+1}^k-2(y^h)_n^k+(y^h)_{n-1}^k)+(q^h)_n^k(y^h)_n^k);\tag{8}$$

областью определения $\Phi_\Im^{0h}$ этого оператора является множество сеточных функций $y^h\in\Phi_\Im^h$, обращающихся в нуль на границе $\partial\Phi_\Im^{0h}$ сетки $\Phi_\Im^{0h}$, т.е. функции y^h удовлетворяют условиям

СОДЕРЖАНИЕ

$$\underset{k=1,m-1}{(y^h)_0^k} = 0,\ (y^h)_N^m = 0. \qquad (9)$$

На функциях $\varphi^h, \psi^h \in \Phi_{\Im}^{0h}$ рассмотрим функционал

$$(\Lambda_{\Im}^{0h}\varphi^h, \psi^h) = -\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{N-1}(\Delta^h\nabla^h\varphi^h)_n^k(\psi^h)_n^k + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}(q^h)_n^k(\varphi^h)_n^k(\psi^h)_n^k,$$

здесь q^h – сеточная функция, соответствующая функции $q(x) \in C[\Im]$.

Теорема 3. *Для функций* $\varphi^h, \psi^h \in \Phi_{\Im}^{0h}$ *имеют место тождества:*

$$\begin{gathered}
-\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{N-1}(\Delta^h\nabla^h\varphi^h)_n^k(\psi^h)_n^k = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}(\Delta^h\nabla^h\psi^h)_n^k(\varphi^h)_n^k, \\
-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}(\Delta^h\nabla^h\varphi^h)_k^i(\psi^h)_k^i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}(\nabla^h\varphi^h)_k^i(\nabla^h\psi^h)_k^i,
\end{gathered} \qquad (10)$$

Доказательство. Так как сеточные функции $\varphi^h, \psi^h \in \Phi_{\Im}^{0h}$ удовлетворяют соотношениям (7), то

$$\begin{gathered}
\sum_{k=1}^{m-1}((\psi^h)_N^k - (\psi^h)_{N-1}^k)(\varphi^h)_N^k - ((\psi^h)_1^m - (\psi^h)_0^m)(\varphi^h)_0^m = 0, \\
\sum_{k=1}^{m-1}((\varphi^h)_N^k - (\varphi^h)_{N-1}^k)(\psi^h)_N^k - ((\varphi^h)_1^m - (\varphi^h)_0^m)(\psi^h)_0^m = 0,
\end{gathered} \qquad (11)$$

или, вычитая первое соотношение (11) из второго, получаем

$$\sum_{k=1}^{m-1}((\varphi^h)_{N-1}^k\psi^h)_N^k - (\varphi^h)_{N-1}^k(\psi^h)_N^k) + (\varphi^h)_1^m(\psi^h)_0^m - (\varphi^h)_0^m(\psi^h)_1^m = 0. \qquad (12)$$

Покажем первое тождество в (10). Учитывая представление $\nabla^h y^h$ (6) и соотношения (7), получаем

СОДЕРЖАНИЕ

$$\nabla^h y^h h^2 \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=1}^{N-1} (\Delta^h \nabla^h \varphi^h)_n^k (\psi^h)_n^k = (\varphi^h)_2^1 (\psi^h)_1^1 - 2(\varphi^h)_1^1 (\psi^h)_1^1 +$$

$$+\sum_{n=2}^{N-2} ((\varphi^h)_{n+1}^1 (\psi^h)_n^1 - 2(\varphi^h)_n^1 (\psi^h)_n^1 + (\varphi^h)_{n-1}^1 (\psi^h)_n^1) + (\varphi^h)_N^1 (\psi^h)_{N-1}^1 -$$

$$-2(\varphi^h)_{N-1}^1 (\psi^h)_{N-1}^1 + (\varphi^h)_{N-2}^1 (\psi^h)_{N-1}^1 + (\varphi^h)_2^2 (\psi^h)_1^2 - 2(\varphi^h)_1^2 (\psi^h)_1^2 +$$

$$+\sum_{n=2}^{N-2} ((\varphi^h)_{n+1}^2 (\psi^h)_n^2 - 2(\varphi^h)_n^2 (\psi^h)_n^2 + (\varphi^h)_{n-1}^2 (\psi^h)_n^2) + (\varphi^h)_N^2 (\psi^h)_{N-1}^2 -$$

$$-2(\varphi^h)_{N-1}^2 (\psi^h)_{N-1}^2 + (\varphi^h)_{N-2}^2 (\psi^h)_{N-1}^2 +$$

$$\ldots$$

$$+(\varphi^h)_2^m (\psi^h)_1^m - 2(\varphi^h)_1^m (\psi^h)_1^m + \sum_{n=2}^{N-2} ((\varphi^h)_{N+1}^m (\psi^h)_n^m - 2(\varphi^h)_n^m (\psi^h)_n^m +$$

$$+(\varphi^h)_{n-1}^m (\psi^h)_n^m) - 2(\varphi^h)_{N-1}^m (\psi^h)_{N-1}^m + (\varphi^h)_{N-2}^m (\psi^h)_{N-1}^m.$$

Учитывая соотношения (12) и перегруппируя слагаемые, получаем

$$h^2 \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=1}^{N-1} (\Delta^h \nabla^h \varphi^h)_n^k (\psi^h)_n^k = (\psi^h)_2^1 (\varphi^h)_1^1 - 2(\psi^h)_1^1 (\varphi^h)_1^1 +$$

$$+\sum_{n=2}^{N-2} ((\psi^h)_{n+1}^1 (\varphi^h)_n^1 - 2(\psi^h)_n^1 (\varphi^h)_n^1 + (\psi^h)_{n-1}^1 (\varphi^h)_n^1) + (\psi^h)_N^1 (\varphi^h)_{N-1}^1 -$$

$$-2(\psi^h)_{N-1}^1 (\varphi^h)_{N-1}^1 + (\psi^h)_{N-2}^1 (\varphi^h)_{N-1}^1 + (\psi^h)_2^2 (\varphi^h)_1^2 - 2(\psi^h)_1^2 (\varphi^h)_1^2 +$$

$$+\sum_{n=2}^{n-2} ((\psi^h)_{n+1}^2 (\varphi^h)_n^2 - 2(\psi^h)_n^2 (\varphi^h)_n^2 + (\psi^h)_{n-1}^2 (\varphi^h)_n^2) + (\psi^h)_N^2 (\varphi^h)_{N-1}^2 -$$

$$-2(\psi^h)_{N-1}^2 (\varphi^h)_{N-1}^2 + (\psi^h)_{N-2}^2 (\varphi^h)_{N-1}^2 +$$

$$\ldots$$

$$+(\psi^h)_2^m (\varphi^h)_1^m - 2(\psi^h)_1^m (\varphi^h)_1^m + \sum_{n=2}^{N-2} ((\psi^h)_{n+1}^m (\varphi^h)_n^m - 2(\psi^h)_n^m (\varphi^h)_n^m +$$

$$+(\psi^h)_{n-1}^m (\varphi^h)_n^m) - 2(\psi^h)_{N-1}^m (\varphi^h)_{N-1}^m + (\psi^h)_{N-2}^m (\varphi^h)_{N-1}^m = h^2 \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=1}^{N-1} (\Delta^h \nabla^h \psi^h)_n^k (\varphi^h)_n^k.$$

Покажем второе тождество в (10). Для сеточных функций $\varphi^h, \psi^h \in \Phi_{\Im}^{0h}$ получаем

СОДЕРЖАНИЕ

$$h^2\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{N-1}(\nabla^h\varphi^h)_n^k(\nabla^h\psi^h)_n^k=(\varphi^h)_1^1(\psi^h)_1^1+$$
$$+\sum_{n=2}^{N}((\varphi^h)_n^1(\psi^h)_n^1-(\varphi^h)_{n-1}^1(\psi^h)_n^1-(\varphi^h)_n^1(\psi^h)_{n-1}^1)$$
$$+(\varphi^h)_{n-1}^1(\psi^h)_{n-1}^1)+(\varphi^h)_1^2(\psi^h)_1^2+\sum_{n=2}^{N}((\varphi^h)_n^2(\psi^h)_n^2-$$
$$-(\varphi^h)_{n-1}^2(\psi^h)_n^2-(\varphi^h)_n^2(\psi^h)_{n-1}^2)+(\varphi^h)_{n-1}^2(\psi^h)_{n-1}^2)+$$
$$\ldots$$
$$+\sum_{n=1}^{N-1}((\varphi^h)_n^m(\psi^h)_n^m-(\varphi^h)_{n-1}^m(\psi^h)_n^m-(\varphi^h)_n^m(\psi^h)_{n-1}^m)+$$
$$+(\varphi^h)_{n-1}^m(\psi^h)_{n-1}^m)+(\varphi^h)_{m-1}^m(\psi^h)_{m-1}^m.$$

После перегруппировки слагаемых, используя (7), приходим к соотношениям

$$h^2\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{N-1}(\nabla^h\varphi^h)_n^k(\nabla^h\psi^h)_n^k=-\{(\varphi^h)_2^1(\psi^h)_1^1-2(\varphi^h)_1^1(\psi^h)_1^1+$$
$$+\sum_{n=2}^{N-1}((\varphi^h)_{N+1}^1(\psi^h)_N^1-2(\varphi^h)_N^1(\psi^h)_N^1+(\varphi^h)_{N-1}^1(\psi^h)_N^1)+$$
$$+(\varphi^h)_2^2(\psi^h)_1^2-2(\varphi^h)_1^2(\psi^h)_1^2+\sum_{n=2}^{N-1}((\varphi^h)_{n+1}^2(\psi^h)_n^2-$$
$$-2(\varphi^h)_n^2(\psi^h)_n^2+(\varphi^h)_{n-1}^2(\psi^h)_n^2)+$$
$$\ldots$$
$$+\sum_{n=1}^{N-1}((\varphi^h)_{N+1}^m(\psi^h)_N^m-2(\varphi^h)_N^m(\psi^h)_N^m+(\varphi^h)_{N-1}^m(\psi^h)_N^m)-$$
$$-2(\varphi^h)_{N-1}^m(\psi^h)_{N-1}^m+(\varphi^h)_{N-2}^m(\psi^h)_{N-1}^m\}=-h^2\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{N-1}(\Delta^h\nabla^h\varphi^h)_n^k(\psi^h)_n^k.$$

Лемма доказана.

Следствие. Из первого тождества (10) вытекает самосопряженность оператора $\Lambda_{\Im}^{0h}$: для $\varphi^h,\psi^h\in\Phi_{\Im}^{0h}$ имеет место $(\Lambda_{\Im}^{0h}\varphi^h,\psi^h)=(\varphi^h,\Lambda_{\Im}^{0h}\psi^h)$. Положительная определенность оператора $\Lambda_{\Im}^{0h}$ вытекает из второго тождества (10): для $\varphi^h,\psi^h\in\Phi_{\Im_1}^{0h}$ $(\Lambda_{\Im_1}^{0h}\varphi^h,\varphi^h)=-\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{N-1}(\Delta^h\nabla^h\varphi^h)_n^k(\varphi^h)_n^k+\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{N-1}(q^h)_n^k((\varphi^h)_n^k)^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}((\nabla^h\varphi^h)_k^i)^2+$ $\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}(q^h)_k^i((\varphi^h)_k^i)^2$, откуда следует, что $(\Lambda_{\Im}^{0h}\varphi^h,\varphi^h)>0$, на ненулевых сеточных функциях φ^h.

3. Аппроксимация эволюционных систем. Рассмотрим два эволюционных уравнения относительно функции $u(x,t)\in\Phi_{\Im_T}\subset L^2(\Im_T)$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Lambda_{\Im_T} u(x,t) + f(x,t),$$
$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \Lambda_{\Im_T} u(x,t) + f(x,t), \tag{13}$$

где функция $f(x,t)$ – элемент многообразия $\Phi_{\Im_T}$ функций класса $C(\Im_T) \cap C^2[\Im_T]$, оператор $\Lambda_{\Im_T}$ определен на многообразии $\Phi_{\Im_T}$ и является эллиптическим оператором (см. аналогичный оператор $\Lambda_{\Im}$ в разделе 1):

$$\Lambda_{\Im_T} u(x,t) = -\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + q(x)u(x,t).$$

Разностные уравнения, соответствующие уравнениям (13), запишем в следующем виде:

$$\frac{u^{j+1} - u^j}{\tau} = \Lambda_{\Im_T} \frac{u^{j+1} + u^j}{2} + f^j,$$
$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \Lambda_{\Im_T} \frac{u^{j+1} + u^j}{2} + f^j. \tag{14}$$

Первое соотношение в (14) является схемой второго порядка аппроксимации по τ Кранка-Николсона [1, с. 41], второе соотношение в (14) также является схемой второго порядка аппроксимации по τ; обе схемы неявные. Можно показать, что при некоторых необременительных условиях обе разностные схемы абсолютно устойчивы [1, с. 243 и 279] и для них справедлива теорема сходимости А.Ф. Филиппова [1, с. 53].

Пример 1. Для эллиптического оператора (оператора Лапласа) $\Lambda_{\Im_T} u \equiv \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$, $u(x,t) \in \Phi_{\Im_T} \subset L^2(\Im_T)$, $\Im_T = (\bigcup_{k=1}^{3} \gamma_k) \times (0,T)$ $(T > 0)$ рассмотрим эволюционное уравнение переноса

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{15}$$

при следующих начальных и краевых условиях:

$$u(x,0) = x(1-x),\ x \in \Im \setminus \partial\Im,\ u(x,0) = 0,\ \ x \in \partial\Im, \tag{16}$$
$$u(x,t) = 0,\ x \in \partial\Im,\ 0 \le t \le T.$$

Замечание. В литературе прикладного характера соотношения (15), (16) называют задачей переноса теплоты по гидросети $\Im$ при гидродинамическом процессе, т. е. при транспортировке вязкой среды по гидросети с учетом неизотермической составляющей гидродинамического процесса.

Отметим, прежде всего, что соотношение (1) во внутреннем узле $\zeta \in J(\Im)$ принимает вид

СОДЕРЖАНИЕ

$$\frac{\partial u(1,t)_{\gamma_1}}{\partial x}+\frac{\partial u(1,t)_{\gamma 2}}{\partial x}=\frac{\partial u(0,t)_{\gamma_3}}{\partial x} \tag{17}$$

(таковое в совокупности с условиями непрерывности $u(1,t)_{\gamma_1}=u(1,t)_{\gamma 2}=u(0,t)_{\gamma_3}$ в литературе называют условиями согласования).

Аппроксимация на равномерной сетке $\Im_{\Im}^{h}$ соотношений (15) – (17), заданных на $\Im_{T}$, приводит к разностной схеме

$$\frac{u^{j+1}-u^{j}}{\tau}=\frac{u_{i+1}^{j}+u_{i-1}^{j}+u_{i}^{j+1}+u_{i+1}^{j-1}-4u_{i}^{j}}{h^2}, \tag{18}$$

$$\begin{gathered}(u_N^j-u_{N-1}^j)_{\gamma_1}+(u_N^j-u_{N-1}^j)_{\gamma_2}=(u_1^j-u_0^j)_{\gamma_3},\\ (u_N^j)_{\gamma_1}=(u_N^j)_{\gamma_2}=(u_0^j)_{\gamma_3},\\ u_i^j=ih(1-ih),\ i=1,2,...,N,\ (u_0^j)_{\gamma_1,\gamma_2}=(u_N^j)_{\gamma_3}=0;\end{gathered} \tag{19}$$

здесь

$$\Lambda_{\Im_T}\frac{u^{j+1}+u^{j}}{2}\equiv\frac{u_{i+1}^{j}+u_{i-1}^{j}+u_{i}^{j+1}+u_{i+1}^{j-1}-4u_{i}^{j}}{h^2},\ j=1,2,...$$

Пример 2. Для того же эллиптического оператора $\Lambda_{\Im_T}u\equiv\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$, $u(x,t)\in\Phi_{\Im_T}\subset L^2(\Im_T)$, $\Im_T=(\bigcup_{k=1}^{3}\gamma_k)\times(0,T)\ (T>0)$ эволюционное уравнение колебаний, генерируемых движением вязкой среды в гидросети (волновое уравнение), имеет вид

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{20}$$

при начальных и краевых условиях вида:

$$\begin{gathered}u(x,0)=x(1-x),\ x\in\Im\setminus\partial\Im,\ u(x,0)=0,\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=0,\ x\in\partial\Im,\\ u(x,t)=0,\ x\in\partial\Im,\ 0\le t\le T.\end{gathered} \tag{21}$$

Разностная схем для соотношений (20), (21) аналогична предыдущей с той лишь разницей, что соотношение (18) заменено на

$$\frac{u_i^{j+1}-2u_i^j+u_i^{j-1}}{\tau^2}=\frac{u_{i+1}^{j}+u_{i-1}^{j}+u_{i}^{j+1}+u_{i+1}^{j-1}-4u_{i}^{j}}{h^2}$$

и к соотношениям (19) добавлено соотношение

$$u_i^1=u_i^0-h^2.$$

СОДЕРЖАНИЕ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики // М.: Наука, 1977. С. 455.

2. Иванов А.В., Балабан О.Р. Разностная схема численного анализа динамики многофазной среды в сетеподобной гидросистеме при неизотермических условиях // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. 2016. № 2. С. 481–489.

3. Балабан О.Р. Численный анализ математической модели турбулентных процессов в гидросети // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. X междунар. конф. «ПМТУКТ-2017» Воронеж: Изд-во «Научная книга, 2017. С.66-67.

4. Иванов А.В., Балабан О.Р. Граничная оптимизация процесса переноса в пространственной сети // Системы управления и информационные технологии, №3(69), 2017. С.4-6.

5. Иванов А.В., Приходько И.В. Разностная схема для математической модели волновых процессов динамики моногофазных сред гидросети // Системы управления и информационные технологии, №3(69), 2016. С. 9 – 13.

6. Иванов А.В., Приходько И.В. Конечно-разностная модель волновых процессов в гидросети // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. X междунар. конф. «ПМТУКТ-2017» Воронеж: Изд-во «Научная книга, 2017. С. 169 – 171.

7. Приходько И.В. Задача оптимизации для волновой системы с распределёнными параметрами на сети // Системы управления и информационные технологии, №3(69), 2017. С.15 – 20.

8. Подвальный С.Л., Провоторов В.В. Оптимизация по стартовым условиям параболической системы с распределенными параметрами на графе // Системы управления и информационные технологии. 2014. Т.58. № 4. С. 70-74.

REFERENCES

1. Marchuk G.I. Metody vychislitel'noj matematiki // M.: Nauka, 1977. P. 455.

2. Ivanov A.V., Balaban O.R. Raznostnaya skhema chislennogo analiza dinamiki mnogofaznoj sredy v setepodobnoj gidrosisteme pri neizotermicheskikh usloviyakh // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. 2016. № 2. P. 481–489.

3. Balaban O.R. CHislennyj analiz matematicheskoj modeli turbulentnykh protsessov v gidroseti // Sovremennye metody prikladnoj matematiki, teorii upravleniya i komp'yuternykh tekhnologij: sb. tr. X mezhdunar. konf. «PMTUKT-2017» Voronezh: Izd-vo «Nauchnaya kniga, 2017. P.66-67.

4. Ivanov A.V., Balaban O.R. Granichnaya optimizatsiya protsessa perenosa v prostranstvennoj seti // Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii, №3(69), 2017. P.4-6.

5. Ivanov A.V., Prikhod'ko I.V. Raznostnaya skhema dlya matematicheskoj modeli volnovykh protsessov dinamiki monogofaznykh sred gidroseti // Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii, №3(69), 2016. P. 9 – 13.

6. Ivanov A.V., Prikhod'ko I.V. Konechno-raznostnaya model' volnovykh protsessov v gidroseti // Sovremennye metody prikladnoj matematiki, teorii upravleniya i komp'yuternykh tekhnologij: sb. tr. X mezhdunar. konf. «PMTUKT-2017» Voronezh: Izd-vo «Nauchnaya kniga, 2017. P. 169 – 171.

7. Prikhod'ko I.V. Zadacha optimizatsii dlya volnovoj sistemy s raspredelyonnymi parametrami na seti // Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii, №3(69), 2017. P.15 – 20.

8. Podval'nyj S.L., Provotorov V.V. Optimizatsiya po startovym usloviyam parabolicheskoj sistemy s raspredelennymi parametrami na grafe // Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii. 2014. T.58. № 4. P. 70-74.

Иванов Алексей Владимирович, начальник научно-исследовательского управления научно-исследовательского центра (проблем применения, обеспечения и управления авиацией Военно-воздушных сил),, кандидат технических наук, доцент, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А, vaiu@mil.ru

Провоторов Вячеслав Васильевич, старший научный сотрудник научно-исследовательского отдела научно-исследовательского центра (проблем применения, обеспечения и управления авиацией Военно-воздушных сил), доктор физико-математических наук, профессор, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А, vaiu@mil.ru

Балабан Олеся Руслановна, младший научный сотрудник научно-исследовательского отдела научно-исследовательского центра (проблем применения, обеспечения и управления авиацией Военно-воздушных сил), Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А, vaiu@mil.ru

Приходько Инна Владимировна, научный сотрудник научно-исследовательского отдела научно-исследовательского центра (проблем применения, обеспечения и управления авиацией Военно-воздушных сил), Военный учебный научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А, vaiu@mil.ru