УДК 517.962.2
ГРНТИ 27.31.21

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ МНОГОСВЯЗНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А.Ю. АЛЕКСАНДРОВ, доктор физико-математических наук, профессор
Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург)
А.П. ЖАБКО, доктор физико-математических наук, профессор
Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург)
В.В. ПРОВОТОРОВ, доктор физико-математических наук, профессор
ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)

Исследуется некоторый класс существенно нелинейных сложных (многосвязных) систем с запаздыванием, описывающих динамические характеристики движущего объекта (летательные аппараты, морские суда). С помощью метода функций Ляпунова и подхода Разумихина определяются условия, при выполнении которых нулевые решения рассматриваемых систем являются асимптотически устойчивыми при любом значении запаздывания.

Ключевые слова: сложные системы; запаздывание; устойчивость; функции Ляпунова; нестационарные связи.

ASYMPTOTIC STABILITY MULTIVARIABLE DIFFERENTIAL-DIFFERENCE SYSTEMS WITH DELAY SOLUTIONS

A.YU. ALEKSANDROV, Doctor of physico-mathematical sciences, Professor
St. Petersburg State University (St. Petersburg)
A.P. ZHABKO, Doctor of physico-mathematical sciences, Professor
St. Petersburg State University (St. Petersburg)
V.V. PROVOTOROV, Doctor of physico-mathematical sciences, Professor
MESC AF "N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy" (Voronezh)

A certain class of essentially nonlinear complex (multiply connected) systems with delay describing the dynamic characteristics of the moving object (aircrafts, ships) is studied. Using the Lyapunov function method and Razumihin's approach, conditions are determined under which the zero solutions of the systems under consideration are asymptotically stable for any value of the delay.

Keywords: complex systems, delay, stability, Lyapunov functions, nonstationary constraints.

1. Введение. Одна из актуальных проблем современной теории управления – это анализ устойчивости систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом [1, 2] и целью разработки пакета управляющих воздействий, гарантирующих устойчивость системы на выбранной траектории движения (автоматическое регулирование движением). Дифференциальные системы такого рода широко используются при моделировании различных реальных процессов и явлений, например, движение летательных аппаратов, морских судов. При этом любая система

СОДЕРЖАНИЕ

автоматического регулирования в той или иной степени представляет собой систему с запаздыванием.

При исследовании указанной проблемы необходимо учитывать влияние запаздывания на устойчивость решений [1, 3]. Известно [2], что введение даже малого запаздывания может привести к потере устойчивости. Кроме того, для многих моделей величина запаздывания является неизвестной. Поэтому большой интерес представляет задача нахождения предельных значений запаздываний, не нарушающих устойчивость решений, в том числе выделения таких классов систем, для которых устойчивость сохраняется при любых значениях запаздывания [1-3].

Основным методом анализа устойчивости нелинейных систем является прямой метод Ляпунова. Для систем с запаздывающим аргументом при его применении используются или функционалы Ляпунова – Красовского [1--3, 4] или функции Ляпунова и подход Б.С. Разумихина [1, 2, 5, 6]. С помощью этих подходов были получены условия устойчивости решений для многих типов систем с запаздыванием (см. [1–8] и цитируемую там литературу). Однако следует отметить, что до сих пор не существует общих конструктивных способов нахождения функций или функционалов Ляпунова для нелинейных систем.

В настоящей работе исследуются сложные (многосвязные) системы с запаздывающим аргументом. Предполагается, что изолированные подсистемы являются однородными, и при отсутствии запаздывания их нулевые решения асимптотически устойчивы. С помощью метода функций Ляпунова и подхода Разумихина определяются условия, при выполнении которых нулевые решения сложных систем будут асимптотически устойчивыми при любом значении запаздывания.

2. Постановка задачи. Пусть τ – некоторое положительное число. Обозначим через $PC([-\tau,0],R^n)$ пространство кусочно-непрерывных векторных функций $\varphi(\theta):[-\tau,0]\to R^n$ с равномерной нормой $\|\varphi\|_\tau=\sup_{\theta\in[-\tau,0]}\|\varphi(\theta)\|$, а под $\|\cdot\|$ будем понимать евклидову норму вектора.

Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}}_s(t)=\mathbf{g}_s(\mathbf{x}_s(t-\tau))+\sum_{j=1}^{m}\mathbf{Q}_{sj}(t,\mathbf{x}(t-\tau)),\qquad s=1,\dots,m, \tag{1}$$

описывающую динамику сложной системы [9], состоящей из m взаимодействующих подсистем. Здесь $x(t)=(x_1^T(t),\dots,x_m^T(t))^T\in R^n$, $x_s(t)\in R^{n_s}$, $n=n_1+\dots+n_m$; $\tau>0$ – постоянное запаздывание; элементы векторов $g_s(x_s)$ являются непрерывно дифференцируемыми при $x_s\in R^{n_s}$ однородными функциями порядка $\mu_s>1$; векторы $Q_{sj}(t,x)$ непрерывны в области $t\ge0$, $\|x\|<H$ $(H=\mathrm{const}>0)$ и удовлетворяют условиям $\|Q_{sj}(t,x)\|\le c_{sj}\|x_j\|^{\alpha_{sj}}$, где $\alpha_{sj}>1$, $c_{sj}\ge0$. Функции $g_s(x_s)$ характеризуют внутренние связи подсистем, а функции $Q_{sj}(t,x)$ – взаимодействие между подсистемами. Каждое решение $x(t,t_0,\varphi)$ системы (1) при

СОДЕРЖАНИЕ

$t \ge t_0$ определяется начальным моментом времени $t_0 \ge 0$ и начальной функцией $\varphi(\theta) \in \Omega_H$, где Ω_H – множество функций $\varphi(\theta) \in PC([-\tau,0],R^n)$ таких, что $\|\varphi\|_\tau < H$. Из сделанных предположений следует, что рассматриваемая система имеет нулевое решение.

Пусть нулевые решения изолированных подсистем без запаздывания

$$\dot{x}_s(t) = g_s(x_s(t)), \quad s = 1,\ldots,m, \tag{2}$$

асимптотически устойчивы. Требуется определить условия, при выполнении которых нулевое решение сложной системы (1) будет асимптотически устойчивым для любого значения $\tau > 0$.

Устойчивость существенно нелинейных многосвязных систем без запаздывания исследовалась в [10, 11]. В [8] результаты указанных работ были распространены на дифференциально-разностные системы вида (1). Рассматривалась вспомогательная система линейных неравенств

$$\alpha_{sj} h_j > \mu_s h_s, \quad s, j = 1,\ldots,m. \tag{3}$$

Было доказано, что если существуют положительные числа $h_1,\ldots,h_m$, удовлетворяющие условиям (3), то нулевое решение сложной системы (1) асимптотически устойчиво при любом $\tau > 0$. Требование существования положительного решения системы (3) означает, что порядки однородности изолированных подсистем, в определенном смысле, меньше порядков функций, характеризующих связи между подсистемами.

В настоящей статье будем считать, что

$$\alpha_{sj} = \mu_j, \quad s, j = 1,\ldots,m. \tag{4}$$

При таких значениях параметров α_{sj} неравенства (3) не имеют положительных решений, поэтому к рассматриваемой многосвязной системе нельзя применить результаты работы [8]. Покажем, что если функции $Q_{sj}(t,x)$ удовлетворяют некоторым дополнительным ограничениям, то сохранение асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) при любом запаздывании можно гарантировать и в случае, когда справедливы равенства (4).

3. Достаточные условия асимптотической устойчивости. Предположим, что для каждой s-ой изолированной подсистемы из семейства (2) удалось построить непрерывно дифференцируемую при $x_s \in R^{n_s}$ положительно определенную положительно однородную порядка $\gamma_s > 1$ функцию Ляпунова $V_s(x_s)$ такую, что функция $(\partial V_s / \partial x_s)^T g_s(x_s)$ отрицательно определена, $s = 1,\ldots,m.$ Не умаляя общности, будем считать, что $\gamma_s = \omega\mu_s + 1$, $s = 1,\ldots,m$, где $\omega = \text{const} > 0$. Тогда при всех $x_s \in R^{n_s}$ справедливы оценки

$$a_{1s}\|x_s\|^{\omega\mu_s+1} \le V_s(x_s) \le a_{2s}\|x_s\|^{\omega\mu_s+1}, \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial V_s}{\partial x_s}\right)^T g_s(x_s) \le -a_{3s}\|x_s\|^{(\omega+1)\mu_s}, \tag{6}$$

$$\left\|\frac{\partial V_s}{\partial x_s}\right\| \le a_{4s}\|x_s\|^{\omega\mu_s}, \tag{7}$$

где $a_{1s}, a_{2s}, a_{3s}, a_{4s}$ – положительные постоянные, $s = 1,\dots,m$.

Замечание 1. Существование таких функций Ляпунова доказано в работе [12].

Далее рассмотрим вспомогательную систему неравенств

$$-a_{3s}\eta_s + a_{4s}\sum_{j=1}^{m} c_{sj}\eta_j < 0, \quad s = 1,\dots,m. \tag{8}$$

Теорема 1. *Пусть нулевые решения изолированных подсистем* (2) *асимптотически устойчивы и выполнены равенства* (4). *Если система* (8) *имеет положительные решения, то нулевое решение системы* (1) *будет асимптотически устойчивым при любом* $\tau > 0$.

Доказательство. Функцию Ляпунова строим в виде

$$V(x) = \sum_{s=1}^{m} \lambda_s V_s(x_s), \tag{9}$$

где $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ – положительные коэффициенты. Дифференцируя ее в силу системы (1), получаем

$$\dot V\big|_{(1)} = \sum_{s=1}^{m}\lambda_s\left(\frac{\partial V_s(x_s(t))}{\partial \mathbf{x}_s}\right)^T\left(\mathbf{g}_s(\mathbf{x}_s(t-\tau)) + \sum_{j=1}^{m}\mathbf{Q}_{sj}(t,\mathbf{x}(t-\tau))\right) \le -\sum_{s=1}^{m}\lambda_s a_{3s}\|\mathbf{x}_s(t)\|^{(\omega+1)\mu_s} +$$
$$+\sum_{s,j=1}^{m}\lambda_s a_{4s}\|\mathbf{x}_s(t)\|^{\omega\mu_s}c_{sj}\|\mathbf{x}_j(t)\|^{\mu_j} + \sum_{s=1}^{m}\lambda_s\left(\frac{\partial V_s(x_s(t))}{\partial \mathbf{x}_s}\right)^T(\mathbf{g}_s(\mathbf{x}_s(t-\tau)) - \mathbf{g}_s(\mathbf{x}_s(t))) +$$
$$+\sum_{s,j=1}^{m}\lambda_s a_{4s}\|\mathbf{x}_s(t)\|^{\omega\mu_s}c_{sj}\left(\|\mathbf{x}_j(t-\tau)\|^{\mu_j} - \|\mathbf{x}_j(t)\|^{\mu_j}\right).$$

Известно [13], что если у системы (8) существуют положительные решения, то коэффициенты $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ можно выбрать так, чтобы при всех $x \in R^n$ имела место оценка

$$\sum_{s,j=1}^{m}\lambda_s a_{4s}\|\mathbf{x}_s\|^{\omega\mu_s}c_{sj}\|\mathbf{x}_j\|^{\mu_j} - \sum_{s=1}^{m}\lambda_s a_{3s}\|\mathbf{x}_s\|^{(\omega+1)\mu_s} \le -\tilde b\sum_{s=1}^{m}\|\mathbf{x}_s\|^{(\omega+1)\mu_s},$$

где $\tilde b = \mathrm{const} > 0$.

СОДЕРЖАНИЕ

С использованием данной оценки и формулы конечных приращений Лагранжа, приходим к соотношению

$$\dot{V}\Big|_{(1)} \le -\tilde{b}\sum_{s=1}^{m}\|\mathbf{x}_s(t)\|^{(\omega+1)\mu_s} + b_1\sum_{s=1}^{m}\|\mathbf{x}_s(t)\|^{\omega\mu_s}\,\|\mathbf{x}_s(t-\rho_0\tau)\|^{\mu_s-1}\times\sum_{j=1}^{m}\|\mathbf{x}_j(t-\rho_0\tau-\tau)\|^{\mu_j} +$$
$$+b_2\sum_{s=1}^{m}\|\mathbf{x}_s(t)\|^{\omega\mu_s}\sum_{j=1}^{m}\|\mathbf{x}_j(t-\rho_j\tau)\|^{\mu_j-1}\times\sum_{r=1}^{m}\|\mathbf{x}_r(t-\rho_j\tau-\tau)\|^{\mu_r},$$

в котором $\rho_0,\rho_1,\ldots,\rho_m \in (0,1)$, а b_1 и b_2 – положительные постоянные.

Выберем $\delta > 0$ и натуральное число k. Предположим, что для решения $x(t)$ системы (1) при $\xi \in [t-k\tau, t]$ выполнено неравенство $\|x(t)\| < \delta$ и условие Разумихина $V(x(\xi)) < 2V(x(t))$. Тогда при $\xi \in [t-k\tau, t]$ имеем

$$\|\mathbf{x}_s(\xi)\|^{\omega\mu_s+1} \le \beta_s\sum_{i=1}^{m}\|\mathbf{x}_i(t)\|^{\omega\mu_i+1},$$
$$\beta_s = \text{const} > 0,\quad s = 1,\ldots,m, \tag{10}$$

Используя оценки (10), нетрудно показать (см. [7]), что при достаточно малых значениях δ и достаточно больших k справедливо неравенство

$$\dot{V}(x(t) \le -\frac{\tilde{b}}{2}\sum_{s=1}^{m}\|x_s(t)\|^{(\omega+1)\mu_s}.$$

Таким образом, для функции Ляпунова (9) выполнены все требования теоремы 4.2 из работы [3]. Следовательно, нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Замечание 2. Коэффициенты a_{3s} и a_{4s} в неравенствах (8) зависят, вообще говоря, от найденных функций Ляпунова.

4. Нестационарные связи с нулевыми средними значениями. Предположим теперь, что система (1) имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}}_s(t) = \mathbf{g}_s(\mathbf{x}_s(t-\tau)) + \sum_{j=1}^{m}\mathbf{B}_{sj}(t)\mathbf{D}_j(\mathbf{x}_j(t-\tau)),\quad s = 1,\ldots,m. \tag{11}$$

Здесь элементы векторов $D_j(x_j)$ являются непрерывно дифференцируемыми при $x_j \in R^{n_j}$ однородными функциями порядка $\mu_j > 1$, матрицы $B_{sj}(t)$ непрерывны и ограничены при $t \in [0,+\infty)$, а остальные обозначения те же самые, что и в системе (1).

Теорема 2. *Если нулевые решения изолированных подсистем* (2) *асимптотически устойчивы, а интегралы* $\int_0^t B_{sj}(\zeta)d\zeta$ *ограничены при* $t \in [0,+\infty)$, *то нулевое решение системы* (11) *асимптотически устойчиво при любом* $\tau > 0$.

Доказательство. Из асимптотической устойчивости нулевых решений изолированных подсистем (2) следует [12, 14], что для каждой s-ой подсистемы $(s=1,\ldots,m)$ существует дважды непрерывно дифференцируемая при $x_s \in R^{n_s}$ положительно однородная порядка $\omega\mu_s+1$ функция Ляпунова $V_s(x_s)$, для которой справедливы оценки (5), (6) и (7). При этом в качестве ω можно выбирать любое число, удовлетворяющее условию $\omega > \max\limits_{s=1,\ldots,m} 1/\mu_s$.

Используя подход, предложенный в [15], функцию Ляпунова для системы (11) строим в виде

$$\tilde{V}(t,x)=\sum_{s=1}^{m} V_s(x_s)-\sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\partial V_s}{\partial \mathbf{x}_s}\right)^{T}\sum_{j=1}^{m}\int_0^t \mathbf{B}_{sj}(\zeta)d\zeta\, \mathbf{D}_j(\mathbf{x}_j).$$

Далее, действуя аналогично доказательству теоремы 1, нетрудно показать, что при достаточно больших значениях ω для функции $\tilde{V}(t,x)$ выполнены все требования теоремы 4.2 из работы [3].

Замечание 3. Матрицы $B_{sj}(t)$ удовлетворяют указанному в теореме 2 условию, если их элементы описывают почти периодические колебания без точек сгущения спектра и с нулевыми средними значениями. При этом на амплитуды данных колебаний никаких ограничений не накладывается.

Замечание 4. В отличие от теоремы 1, для применения теоремы 2 не требуется находить однородные функции Ляпунова для изолированных подсистем (2). Достаточно гарантировать существование таких функций.

5. **Пример.** Пусть система (1) имеет вид

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=-2x_1^3(t-\tau)+\psi_1(t)x_2^5(t-\tau),\\ \dot{x}_2(t)=-3x_2^5(t-\tau)+\psi_2(t)x_1^3(t-\tau).\end{cases} \tag{12}$$

Здесь $x_1(t), x_2(t)\in R^1$, а функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ непрерывны при $t\ge 0$ и удовлетворяют условиям $|\psi_s(t)|\le c_s$, $c_s=\mathrm{const}>0$, $s=1,2$.

Для изолированных уравнений без запаздывания

$$\dot{x}_1(t)=-2x_1^3(t),\quad \dot{x}_2(t)=-3x_2^5(t)$$

в качестве однородных функций Ляпунова выберем функции

$$V_1(x_1)=x_1^4/4,\quad V_2(x_2)=x_2^6/6.$$

Применяя теорему 1, получаем, что если выполнено неравенство $c_1c_2<6$, то нулевое решение системы (12) асимптотически устойчиво при любом значении запаздывания.

Предположим теперь, что функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ в рассматриваемых уравнениях определяются по формулам

$$\psi_1(t) = c_1 \cos t, \quad \psi_2(t) = c_2 \sin t,$$

где c_1 и c_2 – положительные постоянные.

В данном случае для системы (12) выполнены условия теоремы 2, поэтому асимптотическая устойчивость ее нулевого решения будет иметь место при любых значениях параметров c_1 и c_2 и при любом запаздывании τ.

5. Заключение. В работе найдены условия устойчивости многосвязных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием по нелинейному приближению, описывающих динамику двигающегося объекта. Доказано, что асимптотическая устойчивость нулевого решения может иметь место и в случае, когда порядки однородности изолированных подсистем совпадают с порядками функций, характеризующих связи между подсистемами. В качестве направлений дальнейших исследований отметим возможность распространения полученных результатов на системы с более сложной структурой связей, например, многоальтернативные системы управления, а также на системы с переменным или распределенным запаздыванием [16, 17].

Отметим также, что дифференциальные системы с пространственной переменной, задаваемой на геометрическом графе, можно интерпретировать как многосвязные системы, учитывая дифференциальные связи во внутренних узлах графа. В такой интерпретации многие вопросы устойчивости указанных систем могут быть изучены посредством анализа спектральных свойств соответствующих задач на графе [18, 19].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Niculescu S. Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach. Lecture Notes in Control and Information Science // New York, Berlin, Heidelberg: Springer, 2001. С.386.

2. Gu K., Kharitonov V.L., Chen J. Stability of Time-Delay Systems // Boston, MA: Birkhauser, 2003. С.343.

3. Hale J. Theory of Functional Differential Equations // New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1977. С. 366.

4. Харитонов В.Л. Функционалы Ляпунова с заданной производной // I. Функционалы полного типа. Вестник СПбУ. Серия 10. 2005. Вып. 1. С. 110-117.

5. Разумихин Б.С. Об устойчивости систем с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, № 4. С. 500-512.

6. Teel A.R. Connections between Razumikhin-type theorems and the ISS nonlinear small gain theorems // IEEE Trans. Autom. Control. 1998. V. 43, N 7. С. 960-964.

7. Александров А.Ю., Жабко А.П. Об устойчивости решений одного класса нелинейных систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2006. № 9. С. 3-14.

8. Александров А.Ю., Жабко А.П. Об устойчивости сложных систем с запаздыванием // Материалы конференции «Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах» (УТЭОСС-2012) (5-я Российская мультиконференция по проблемам управления (МКПУ-2012)). СПб.: ГНЦ РФ ОАО Концерн «ЦНИИ Электроприбор». 2012. С. 37-40.

9. Siljak D.D. Large-Scale Dynamic Systems: Stability and Structure // New York: North-Holland, 1978. С. 416.

10. Косов А.А. Об устойчивости сложных систем по нелинейному приближению // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 10. С. 1432-1434.

СОДЕРЖАНИЕ

11. Александров А.Ю. Об устойчивости сложных систем в критических случаях // Автоматика и телемеханика. 2001. № 9. С. 3-13.

12. Зубов В.И. Устойчивость движения // М.: Высш. школа, 1973. С. 272.

13. Aleksandrov A.Yu., Platonov A.V. Conditions of ultimate boundedness of solutions for a class of nonlinear systems // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. 2008. V. 8, N 2. С. 109-122.

14. Rosier L. Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field // Systems and Control Letters. 1992. V. 19, N 6. С. 467-473.

15. Александров А.Ю. К вопросу об устойчивости по нелинейному приближению // Сибирский мат. журнал. 1997. Т. 38. № 6. С. 1203-1210.

16. Provotorov V.V. Boundary control of a parabolic system with delay and distributed parameters on the graph // International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP). 2015. С. 126-128.

17. Провоторов В.В. Оптимальное управление параболической системой с распределенными параметрами на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. № 3. С. 154-163.

18. Провоторов В.В. Спектральная задача на графе с циклом // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 11. С. 1665.

19. Провоторов В.В. Разложение по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля на графе-пучке // Известия высших учебных заведений. Математика. 2008. № 3. С. 50-62.

REFERENCES

1. Niculescu S. Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach. Lecture Notes in Control and Information Science // New York, Berlin, Heidelberg: Springer, 2001. P.386.

2. Gu K., Kharitonov V.L., Chen J. Stability of Time-Delay Systems // Boston, MA: Birkhauser, 2003. P.343.

3. Hale J. Theory of Functional Differential Equations // New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1977. P. 366.

4. Харитонов В.Л. Функционалы Ляпунова с заданной производной // I. Функционалы полного типа. Вестник СПбУ. Серия 10. 2005. Вып. 1. P. 110-117.

5. Razumikhin B.S. Ob ustojchivosti sistem s zapazdyvaniem // Prikl. matematika i mekhanika. 1956. T. 20, № 4. P. 500-512.

6. Teel A.R. Connections between Razumikhin-type theorems and the ISS nonlinear small gain theorems // IEEE Trans. Autom. Control. 1998. V. 43, N 7. P. 960-964.

7. Aleksandrov A.YU., ZHabko A.P. Ob ustojchivosti reshenij odnogo klassa nelinejnykh sistem s zapazdyvaniem // Avtomatika i telemekhanika. 2006. № 9. P. 3-14.

8. Aleksandrov A.YU., ZHabko A.P. Ob ustojchivosti slozhnykh sistem s zapazdyvaniem // Materialy konferentsii «Upravlenie v tekhnicheskikh, ehrgaticheskikh, organizatsionnykh i setevykh sistemakh» (UTEHOSS-2012) (5-ya Rossijskaya mul'tikonferentsiya po problemam upravleniya (MKPU-2012)). SPb.: GNTS RF OAO Kontsern «TSNII EHlektropribor». 2012. P. 37-40.

9. Siljak D.D. Large-Scale Dynamic Systems: Stability and Structure // New York: North-Holland, 1978. P. 416.

10. Kosov A.A. Ob ustojchivosti slozhnykh sistem po nelinejnomu priblizheniyu // Differents. uravneniya. 1997. T. 33. № 10. P. 1432-1434.

11. Aleksandrov A.YU. Ob ustojchivosti slozhnykh sistem v kriticheskikh sluchayakh // Avtomatika i telemekhanika. 2001. № 9. P. 3-13.

12. Zubov V.I. Ustojchivost' dvizheniya // M.: Vyssh. shkola, 1973. P. 272.

13. Aleksandrov A.Yu., Platonov A.V. Conditions of ultimate boundedness of solutions for a class of nonlinear systems // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. 2008. V. 8, N 2. P. 109-122.

14. Rosier L. Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field // Systems and Control Letters. 1992. V. 19, N 6. P. 467-473.

15. Aleksandrov A.YU. K voprosu ob ustojchivosti po nelinejnomu priblizheniyu // Sibirskij mat. zhurnal. 1997. T. 38. № 6. P. 1203-1210.

16. Provotorov V.V. Boundary control of a parabolic system with delay and distributed parameters on the graph // International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP). 2015. P. 126-128.

17. Provotorov V.V. Optimal'noe upravlenie parabolicheskoj sistemoj s raspredelennymi parametrami na grafe // Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10: Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya. 2014. № 3. P. 154-163.

18. Provotorov V.V. Spektral'naya zadacha na grafe s tsiklom // Differents. uravneniya. 2010. T. 46. № 11. P. 1665.

19. Provotorov V.V. Razlozhenie po sobstvennym funktsiyam zadachi SHturma-Liuvillya na grafe-puchke // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenij. Matematika. 2008. № 3. P. 50-62.

Александров Александр Юрьевич, зав. кафедрой Управления медико-биологическими системами, доктор физико-математических наук, профессор. Санкт-Петербургский государственный университет (СПбГУ) (г. Санкт-Петербург), Россия, 198504, г. Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д. 35.

Жабко Алексей Петрович, зав. кафедрой Теории управления, доктор физико-математических наук, профессор. Санкт-Петербургский государственный университет (СПбГУ) (г. Санкт-Петербург), Россия, 198504, г. Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д. 35.

Провоторов Вячеслав Васильевич, старший научный сотрудник научно-исследовательского отдела научно-исследовательского центра (проблем применения, обеспечения и управления авиацией Военно-воздушных сил), доктор физико-математических наук, профессор, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А, vaiu@mil.ru