УДК 532.517
ГРНТИ 30.17.27

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ ФОРМИРОВАНИЯ ВТОРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ НА ОСНОВЕ УЧЕТА ФАКТОРА ПОПЕРЕЧНОЙ ВЯЗКОСТИ

В.Н. КОЛОДЕЖНОВ, доктор технических наук, профессор
ВУНЦ ВВС «ВВА им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (г. Воронеж)

В статье предложена структура комбинированной реологической модели жидкости. Главным отличием предлагаемой модели является то, что она учитывает влияние фактора поперечной вязкости. Проведен краткий анализ схемы течения, в которой имеют место вторичные течения. Такой тип течений характеризуется наличием поперечных составляющих скорости по отношению к начальным линиям тока основного течения.

Ключевые слова: реологическая модель, поперечная вязкость, вторичные течения

THE SECONDARY FLOWS FORMATION INITIAL STAGE MODELING BASED ON THE TRANSVERSE VISCOSITY FACTOR ACCOUNT

V.N. KOLODEZHNOV, Doctor of Technical Sciences, Professor
MESC AF "N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy" (Voronezh)

The paper proposes the fluid combined rheological model structure. The main difference of the proposed model is that it takes into account the transverse viscosity effect. A brief analysis of the current schemes, which have the secondary flows. This type of flows is characterized by the transverse velocity components presence relative to the initial streamlines of the main flow.

Keywords: rheological model, transverse viscosity, secondary flow.

Введение. Многие экспериментальные факты указывают на то, что при определенных условиях хорошо известные схемы течения претерпевают существенные изменения. Как правило, это происходит при превышении соответствующим параметром течения некоторого критического порогового уровня. При этом на основное поле скоростей накладывается так называемое вторичное течение, характеризуемое в первую очередь поперечными по отношению к исходным линиям тока составляющими скорости. Особенно это становится наглядным на примерах достаточно простых течений. В качестве наиболее известного примера можно привести вращательное течение Тейлора в зазоре между коаксиальными цилиндрами в случае, когда внутренний цилиндр вращается с заданной угловой скоростью, а внешний – остается неподвижным [1–5]. Результаты этих и целого ряда других исследований демонстрируют следующее развитие течения. В случае достаточно медленных вращений в зазоре между цилиндрами наблюдается вполне ожидаемое течение, линии тока которого представляют собой окружности. Однако при превышении угловой скоростью некоторого порогового значения схема течения меняется. Происходит "генерирование" поперечных (к исходным круговым линиям тока) составляющих скорости и в зазоре формируются торообразные вихревые структуры. При этом возникающая суперпозиция исходного вращательного течения и наложенного на него вторичного течения по-прежнему демонстрирует ламинарный режим течения.

Подобное возникновение вторичных течений с формированием вихревых структур отмечается и в случае весьма простого варианта течения Куэтта в плоском канале [6].

Анализируя эти примеры, следует особо заметить, что на уровне математической модели собственно краевая задача (в смысле постановки граничных условий) остается без изменений. Тем не менее, ожидаемое решение задачи по определению поля скоростей должно оказаться принципиально иным.

Моделирование возникающих вторичных течений на основе реологической модели, учитывающей пороговое "подключение" фактора поперечной вязкости. В наиболее общей форме реологическая модель вязкой несжимаемой жидкости может быть представлена следующим образом [7, 8]

$$\tau_{ij} = -P \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \varphi_1(I_2, I_3) \cdot \varepsilon_{ij} + 4 \cdot \varphi_2(I_2, I_3) \cdot \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ik} \cdot \varepsilon_{kj}; \qquad (1)$$

$$I_2 = \varepsilon_{11} \cdot \varepsilon_{22} + \varepsilon_{22} \cdot \varepsilon_{33} + \varepsilon_{33} \cdot \varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}^2 - \varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{31}^2;$$

$$I_3 = \varepsilon_{11} \cdot \varepsilon_{22} \cdot \varepsilon_{33} + 2 \cdot \varepsilon_{12} \cdot \varepsilon_{23} \cdot \varepsilon_{31} - \varepsilon_{11} \cdot \varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{22} \cdot \varepsilon_{31}^2 - \varepsilon_{33} \cdot \varepsilon_{12}^2;$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \qquad i, j = 1,2,3.$$

где τ_{ij}, ε_{ij} – компоненты, соответственно, тензоров напряжений и скоростей деформаций; P – гидростатическое давление; δ_{ij} – символ Кронекера; u_i – компоненты вектора скорости жидкости в рассматриваемой точке области течения; x_i координаты декартовой системы отсчета; $\varphi_1(I_2, I_3)$, $\varphi_2(I_2, I_3)$ – заданные функции второго I_2 и третьего I_3 инвариантов тензора скоростей деформаций

Заметим, что первый инвариант для случая несжимаемых жидкостей тождественно равен нулю.

В наиболее известном частном же случае, когда выполняются условия

$$\varphi_1(I_2, I_3) = \mu = const; \qquad \varphi_2(I_2, I_3) \equiv 0;$$

соотношения (1) сводятся к реологической модели классической ньютоновской жидкости. При этом параметр μ в такой ситуации представляет собой динамическую вязкость.

В других частных случаях, когда

$$\varphi_2(I_2, I_3) \neq 0 \;;$$

эту функцию нередко называют поперечной вязкостью η_c.

Известно, что учет поперечной вязкости при моделировании течений с такой реологической моделью приводит к решениям, которые предполагают наличие вторичных течений. Некоторые примеры задач такого рода рассмотрены в [7]. Однако используемые в [7] реологические модели не предполагают возможности трансформации исходной схемы течения в какую-то другую схему, но уже при наличии вторичных течений подобно тому, как это имеет место в случае течения Куэтта [1–5].

С учетом этого обстоятельства в [9] была предложена гипотеза, существо которой сводится к следующему: "генерирование" поперечных составляющих скорости, ответственных за возникновение вторичных течений, предопределяет некую "границу" области применимости традиционной ньютоновской реологической модели, при переходе через которую вступает в силу новая реологическая модель, учитывающая фактор поперечной вязкости.

Такой гипотезе может соответствовать следующий частный вариант реологической модели (1), для которого

$$\varphi_1(I_2, I_3) = \mu = const \;; \tag{2}$$

$$\varphi_2(I_2, I_3) \equiv \eta_c(I_2) = \begin{cases} 0; & |I_2| < I_{2\eta} : \\ \eta_q \cdot \left(|I_2| - I_{2\eta}\right)^q; & |I_2| \ge I_{2\eta}; \end{cases}$$

где $I_{2\eta}$ – некоторое критическое (пороговое) значение модуля второго инварианта тензора скоростей деформаций, ниже уровня которого вторичные течения заведомо не реализуются; q, η_q – параметры модели.

Заметим, что критическое значение $I_{2\eta}$ второго инварианта в данном случае должно рассматриваться, как самостоятельный параметр реологической модели.

Главная особенность модели (1) с учетом (2) заключается в том, что фактор поперечной вязкости, ответственный за формирование вторичного течения, "включается" лишь при превышении модулем второго инварианта тензора скоростей деформаций некоторого порогового, критического значения $I_{2\eta}$. Если же пороговый уровень не достигается, то сплошная среда подчиняется классической модели ньютоновской жидкости с постоянной динамической вязкостью.

Анализ начальной стадии развития течения. Рассмотрим начальную стадию развития течения в малой окрестности некоторой пространственной точки, для которой в начальный момент времени оказывается выполненным условие

$$|I_2| \ge I_{2\eta} . \tag{3}$$

При этом будем предполагать, что начальное распределения скорости и давления здесь в точности удовлетворяет традиционным уравнениям Навье-Стокса.

Для перехода к безразмерной форме записи уравнений динамики в качестве масштабов для давления P_S, координат L_S, времени t_S и второго инварианта I_{2S} примем следующие величины

$$L_S = \frac{\mu \cdot E_S}{\rho \cdot u_S \cdot D_S} ; \qquad P_S = \frac{\rho^3 \cdot u_S^5}{\mu \cdot E_S} ; \qquad t_S = \frac{L_S}{u_S} ; \qquad I_{2S} = \left(\frac{E_S}{\rho \cdot u_S} \right)^2 ; \tag{4}$$

$$E_S = \left| grad \left\{ P + \frac{\rho \cdot u^2}{2} \right\} \right|_S ; \qquad D_S = \left| grad \left\{ 2 \cdot \mu \cdot \sqrt{|I_2|} \right\} \right|_S ; \tag{5}$$

где ρ – плотность жидкости.

Введенный здесь в рассмотрение вектор $\overline{E}$ характеризует собой направление и “быстроту” (по пространственным координатам) максимального нарастания плотности полной механической энергии потока жидкости в рассматриваемой точке области течения. В свою очередь вектор $\overline{D}$ является характеристикой, опять же, направления и “быстроты” максимального нарастания, но уже фактора вязкой диссипации в рассматриваемой точке области течения.

В последних выражениях нижний индекс S указывает на то, что соответствующие величины вычислены в рассматриваемой пространственной точке, с которой будем связывать начало локальной системы координат. При этом одну из координатных осей, например ось Ox_1, направим по касательной к линии тока в рассматриваемой точке.

Проводя тогда с учетом (4), (5) традиционную процедуру перехода к безразмерной форме записи уравнений динамики, можно показать, что в итоге это приведет к следующим безразмерным комплексам

$$K_1 = \frac{E_S}{D_S}\ ; \quad K_2 = \frac{I_{2\eta}}{I_{2S}}\ ; \quad K_3 = \frac{\rho^2 \cdot u_S^3}{\mu \cdot E_S}\ ; \quad K_4 = \frac{\eta_1 \cdot D_S^2}{\rho \cdot \mu^2}\ , \tag{6}$$

характеризующим по совокупности развитие течения в малой окрестности рассматриваемой точки области течения. В данном случае четвертый безразмерный комплекс получен для случая $q = 1$.

Заметим, что первый безразмерный комплекс в (6) по смыслу и месторасположению в уравнениях динамики жидкости представляет собой аналог хорошо известного числа Рейнольдса Re. Однако между комплексом K_1 и число Рейнольдса имеются существенные различия. Число Рейнольдса, как правило, строится по какому-то одному характеному набору размера области течения (например диаметр канала, размер обтекаемого тела и т.п.) и скорости (например средняя скорость в канале, скорость набегающего потока на удалении от обтекаемой поверхности и т.п.). Именно поэтому число Рейнольдса, обобщенно характеризуя течение, тем не менее, не позволяет указать на так называемую зону первичной нестабильности (терминология из [10]), которая может выступить в качестве инициатора начальной стадии формирования вторичных течений. В отличие от числа Рейнольдса, безразмерный комплекс K_1 носит локальный характер и его значения, формируя скалярное поле, оказываются распределенными по области течения. Кроме того, принимая во внимание (5), можно видеть, что K_1 более “тонко” учитывает именно локальные ”дифференциальные” особенности поля скоростей. В данном случае речь в первую очередь идет о точках перегиба профиля скорости, точках экстремума скорости и т.п.

Второй комплекс K_2 характеризует безразмерное пороговое значение модуля второго инварианта тензора скоростей деформаций, при превышении которого происходит, согласно модели (1), (2), “подключение” фактора поперечной вязкости. Анализ экспериментальных данных из [1-5], касающихся начальной стадии формирования вторичных течений (для течений Тейлора – появление торообразных вихревых структур в зазоре между коаксиальными цилиндрами) указывает на то, что второй безразмерный комплекс не является постоянной величиной, а представляет собой некую функцию третьего безразмерного комплекса

$$K_2 = f(K_3)..$$

Такая зависимость позволяет для каждой пространственной точки области течения представить условие (3) в форме

$$\frac{I_2}{I_{2S}} > f(K_3).$$

После проведения процедуры перехода к безразмерной форме записи, решение системы уравнений динамики предлагается искать в виде разложения давления и компонент скорости по степеням пространственных координат. Тогда по результатам рассмотрения наиболее простого приближения можно показать, что в рассматриваемой точке в начальный момент времени могут оказаться выполненными следующие условия

$$\left.\frac{du_i}{dt}\right|_{t=0} = W(K_1, K_2, K_3, K_4) \neq 0; \quad i = 2,3 \qquad (7)$$

Подобный результат, но для несколько другой реологической модели, также учитывающей фактор поперечной вязкости, был получен в [11, 12].

По своему смыслу условия (7) означают следующее. Если в начальный момент времени в рассматриваемой пространственной точке будет выполнено условие $|I_2| > I_{2\eta}$, то в дальнейшем в малой ее окрестности начнут “генерироваться” поперечные составляющие скорости, обуславливающие возникновение вторичных течений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Taylor G.I. Stability of a Viscous Liquid contained between Two Rotating Cylinders. // Phil. Trans. Royal Society. London, 1923. Series A. V. 223. P. 289–343.

2. Donnelly R.J., Schwarz K.W. Experiments on the stability of Viscous Flow Between Rotating Cylinders. VI. Finite-Amplitude Experiments. // Proceeding of the Royal Society. Series A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences. London. 1965. V. 283. P. 531–556.

3. Coles D. Transition in circular Couette flow. // Journal of Fluid Mechanics . 1965. V. 21 , Issue 03. P. 385–425

4. Andereck C.D., Liu S.S., Swinney H.L. Flow regimes in circular Couette system with independently rotating cylinders. // Journal of Fluid Mechanics, 1986. V. 164, P. 155–183.

5. Hinko K.A. Transition in the Small Gap Limit of Taylor – Couette Flow. The Ohio State University Physics Summer Institute, REU Summer 2003; Advisor: Dr. C.D. Andereck, Department of Physics, The Ohio State University, 2003.

6. Bottin S., Dauchot O., Daviaud F., Manneville P. Experimantal evidence of streamwise vortices as finite amplitude solutions in transitional plane Couette flow. // Physics of Fluids. V.10. N. 10. 1998. pp. 2597–2607.

7. Литвинов В.Г. Движение нелинейно вязкой жидкости. – М.: Наука, 1982. – 376 с.

8. Астарита Дж., Марруччи Дж.Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. – М.: Мир, 1978. – 311 с.

9. Колодежнов В.Н. Реологическая модель несжимаемой жидкости, которая учитывает пороговое “подключение” фактора поперечной вязкости. // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия Техника и технологии, 2017. Т. 7, № 2 (23). С. 111–119.

10. Rose H. Elementary Mechanics of Fluids. – N.Y. Dover Publications, 1946. 376 p.

11. Колодежнов В.Н. Анализ некоторых особенностей развития поля скоростей в случае плоского течения жидкости, реологическая модель которой учитывает попереч-

ную вязкость. // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. 2012, № 1, С. 73–77.

12. Колодежнов В.Н. Об одной возможной модели начальной стадии ламинарно-турбулентного перехода. // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2012. Т.8, № 5. С. 2530.

REFERENCES

1. Taylor G.I. Stability of a Viscous Liquid contained between Two Rotating Cylinders. // Phil. Trans. Royal Society. London, 1923. Series A. V. 223. P. 289–343.

2. Donnelly R.J., Schwarz K.W. Experiments on the stability of Viscous Flow Between Rotating Cylinders. VI. Finite-Amplitude Experiments. // Proceeding of the Royal Society. Series A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences. London. 1965. V. 283. P. 531–556.

3. Coles D. Transition in circular Couette flow. // Journal of Fluid Mechanics . 1965. V. 21 , Issue 03. P. 385–425.

4. Andereck C.D., Liu S.S., Swinney H.L. Flow regimes in circular Couette system with inde-pendently rotating cylinders. // Journal of Fluid Mechanics, 1986. V. 164, P. 155–183.

5. Hinko K.A. Transition in the Small Gap Limit of Taylor – Couette Flow. The Ohio State University Physics Summer Institute, REU Summer 2003; Advisor: Dr. C.D. Andereck, Department of Physics, The Ohio State University, 2003.

6. Bottin S., Dauchot O., Daviaud F., Manneville P. Experimantal evidence of streamwise vortices as finite amplitude solutions in transitional plane Couette flow. // Physics of Fluids. V.10. N. 10. 1998. pp. 2597–2607.

7. Litvinov V.G. Dvizhenie nelinejno vyazkoj zhidkosti. – M.: Nauka, 1982. – 376 s.

8. Astarita Dzh., Marruchchi Dzh.Osnovy gidromekhaniki nen'yutonovskikh zhidkostej. – M.: Mir, 1978. – 311 s.

9. Kolodezhnov V.N. Reologicheskaya model' neszhimaemoj zhidkosti, kotoraya uchityvaet porogovoe “podklyuchenie” faktora poperechnoj vyazkosti. // Izvestiya YUgo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Tekhnika i tekhnologii, 2017. T. 7, № 2 (23). S. 111–119.

10. Rose H. Elementary Mechanics of Fluids. – N.Y. Dover Publications, 1946. 376 p.

11. Kolodezhnov V.N. Analiz nekotorykh osobennostej razvitiya polya skorostej v sluchae ploskogo techeniya zhidkosti, reologicheskaya model' kotoroj uchityvaet poperechnuyu vyazkost'. // Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta inzhenernykh tekh-nologij. 2012, № 1, S. 73–77.

12. Kolodezhnov V.N. Ob odnoj vozmozhnoj modeli nachal'noj stadii laminarno-turbulentnogo perekhoda. // Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. 2012. T.8, № 5. S. 25-30.

© Колодежнов В.Н., 2017

«Воздушно-космические силы. Теория и практика». Материал поступил в редколлегию 20.08.2017 г.

Колодежнов Владимир Николаевич, профессор кафедры общественных дисциплин, доктор технических наук, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А, vaiu@mil.ru