



УДК 004.942
ГРНТИ 27.35

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА МНОГОМЕРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

*М.Г. МАТВЕЕВ, доктор технических наук, профессор
ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)
Е.А. СИРОТА, кандидат физико-математических наук
ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)
И.В. ПРИХОДЬКО
ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)
С.А. КУЗНЕЦОВ
ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)*

В настоящей работе предлагается принципиально новый подход моделирования динамики температуры атмосферы с помощью многомерных временных рядов. Суть рассматриваемого подхода заключается в структурной и параметрической идентификации моделей процессов конвективного переноса и диффузии на основе анализа многомерных временных рядов нелинейной динамики поля скалярной величины.

Ключевые слова: динамика атмосферных процессов; моделирование; многомерные временные ряды; структурная идентификация; параметрическая идентификация.

THE DYNAMICS MODELING OF ATMOSPHERIC PROCESSES BASED ON THE MULTIVARIATE TIME SERIES ANALYSIS

*M.G. MATVEEV, Doctor of Technical Sciences, Professor
MESC AF «N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy» (Voronezh)
E.A. SIROTA, Candidate of Physical and Mathematical Sciences
MESC AF «N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy» (Voronezh)
I.V. PRIKHODKO
MESC AF «N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy» (Voronezh)
S.A. KUZNETSOV
MESC AF «N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy» (Voronezh)*

In this paper we propose a fundamentally new approach of the dynamics modeling of atmospheric temperature with the help of multivariate time series. The essence of this approach lies in the structural and parametric identification of models of processes of convective transport and diffusion based on the analysis of multidimensional time series nonlinear dynamics field scalar quantity.

Keywords: dynamics of atmospheric processes; modeling; multidimensional time series; structural identification; parametric identification.

Введение и постановка задачи. На сегодняшний день особенно остро стоит проблема анализа и исследования динамики развития метеорологических процессов в связи с возникающими аномалиями атмосферных явлений. Для моделирования динамики атмосферных процессов используются различные математические подходы. Структура исследуемых показателей может быть описана системой дифференциальных уравне-



ний, отражающих соответствующие законы сохранения или стохастическими последовательностями, заданными системами регрессионных уравнений. В настоящей работе предлагается принципиально новый подход моделирования динамики температуры атмосферы с помощью многомерных временных рядов. Суть рассматриваемого подхода заключается в структурной и параметрической идентификации моделей процессов конвективного переноса и диффузии на основе анализа многомерных временных рядов нелинейной динамики поля скалярной величины.

Будем рассматривать плоское, стохастическое поле скалярной переменной $x(t, l_1, l_2)$, где t – время; l_1, l_2 – пространственные координаты, а само значение x – температура слоя атмосферы в метеорологии.

Наша цель – прогнозирование и анализ поведения переменной x . Решение этой задачи требует построения математического описания процессов, определяющих пространственно-временное изменение x . Построение математической модели может основываться либо на феноменологическом подходе, то есть на знании механизмов этих процессов и использовании универсальных законов сохранения, либо на обработке экспериментальных наблюдений, то есть статистическом подходе. Обычно применяют некоторое сочетание указанных подходов. Например, имеется некоторое приблизительное представление о механизме процессов, которое может быть уточнено на основе обработки измеренных экспериментальных данных. Измерения переменной x , как правило, производят при дискретных значениях переменных $t_k; l_{1i}; l_{2j}$. Таким образом, в узлах пространственной сетки с координатами $l_{1i}; l_{2j}$, или в упрощенной записи – узлах с координатами ij формируются временные ряды стохастической переменной x_{ij}^k .

Сделаем некоторые предположения о возможных процессах, определяющих пространственно-временное поведение поля. В частности, в рамках феноменологического подхода, при отсутствии источников и стоков речь может идти о процессах, интерпретируемых как конвективный перенос и молекулярная диффузия, описываемых известным уравнением математической физики:

$$\frac{\partial x}{\partial t} + v \cdot \text{grad} x = D \cdot \Delta^2 \cdot x, \quad (1)$$

где v – скорость потока; D – коэффициент диффузии; Δ^2 – оператор Лапласа.

Для рассматриваемого плоского поля уравнение (1) примет вид:

$$\frac{\partial x}{\partial t} + v_{11} \frac{dx}{dl_1} + v_{12} \frac{dx}{dl_2} = D \left(\frac{d^2 x}{dl_1^2} + \frac{d^2 x}{dl_2^2} \right). \quad (2)$$

Характерную для рассматриваемого поля случайную неопределенность можно отобразить в аддитивной форме, как это часто делают в статистической физике [1]:

$$\frac{\partial x}{\partial t} + v_{11} \frac{dx}{dl_1} + v_{12} \frac{dx}{dl_2} = D \left(\frac{d^2 x}{dl_1^2} + \frac{d^2 x}{dl_2^2} \right) + \xi(t, l_1, l_2), \quad (3)$$

где $\xi(t, l_1, l_2)$ – пространственно распределенный «белый шум».



Следует отметить, что параметры уравнения (3) зависят и от времени, и от пространственных координат, при этом функции $v_{11}(t, l_1); v_{12}(t, l_2); D(t, l_1, l_2)$ в априори неизвестны.

Прогнозирование и анализ поведения поля обеспечиваются решением уравнения (3) в форме Коши:

$$\frac{\partial x}{\partial t} + v_{11} \frac{\partial x}{\partial l_1} + v_{12} \frac{\partial x}{\partial l_2} = D \left(\frac{\partial^2 x}{\partial l_1^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial l_2^2} \right) + \xi(t, l_1, l_2); \quad (4)$$

$$x(0, l_1, l_2) = \phi(l_1, l_2), \quad x \in R^n.$$

Очевидно, что аналитическое решение уравнения (4) вызывает серьезные трудности. Численное решение можно получить, выбрав подходящую схему аппроксимации и сформировав соответствующую систему конечно-разностных уравнений. Необходимо отметить, что модель (4) описывает обобщенную структуру процессов, в практических приложениях могут функционировать частные структуры процессов, когда адекватная модель будет содержать лишь часть компонент, составляющих уравнение (4). Кроме того, могут существовать источники и стоки, оказывающие влияние на поведение поля.

Таким образом, возникает задача нахождения адекватной модели описания стохастического динамического поля, формируемого процессами, интерпретируемыми как конвективный перенос и диффузия, и возможными источниками и стоками. Решение этой задачи включает структурную и параметрическую идентификацию математического описания рассматриваемых процессов. Решение задач идентификации предлагается проводить на основе анализа многомерных временных рядов.

1. Структурная и параметрическая идентификация модели с постоянными коэффициентами. Для упрощения выкладок и, не теряя общности рассуждений, будем рассматривать одномерный вариант уравнения (4). Кроме того, на первом этапе исследований будем считать, что параметры этого уравнения не меняются во времени. Обобщенная модель примет вид:

$$\frac{\partial x}{\partial t} + v \frac{\partial x}{\partial l} = D \frac{\partial^2 x}{\partial l^2} + \xi(t, l), \quad (5)$$

$$x(0, l) = \phi(l).$$

Для построения разностной схемы уравнения (5) выберем, например, явную трехточечную (по пространственной координате) схему и получим следующую систему стохастических конечно-разностных уравнений:

$$x_i^{k+1} = x_i^k - \frac{v_i t}{l} (x_i^k - x_{i-1}^k) + \frac{D_i t}{l^2} (x_{i+1}^k - 2x_i^k + x_{i-1}^k) + \xi_i^{k+1}, \quad i = 2, \dots, n-1; \quad k = 0, 1, \dots; \quad (6)$$

$$x_i^0 = (x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0).$$

Приведя подобные и приняв обозначения $b_{1i} = \frac{v_i t}{l}$ и $b_{2i} = \frac{D_i t}{l^2}$, получим:

$$x_i^{k+1} = a_{1i} x_i^k + a_{2i} x_{i-1}^k + a_{3i} x_{i+1}^k + \xi_i^{k+1}, \quad i = 2, \dots, n-1; \quad k = 0, 1, \dots; \quad (7)$$

$$x_i^0 = (x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0),$$



$$a_{1i} = 1 - b_{1i} - 2b_{2i}; \quad a_{2i} = b_{1i} + b_{2i}; \quad a_{3i} = b_{2i}. \quad (8)$$

Аналогично можно получить стохастические конечно-разностные уравнения для частных случаев уравнения (5). При этом структура аппроксимирующего выражения (7) сохранится, изменятся только его коэффициенты.

Для случая конвективного переноса без диффузии:

$$\frac{\partial x}{\partial t} + v \frac{\partial x}{\partial l} = \xi, \quad (9)$$

коэффициенты аппроксимирующего выражения (7) примут следующий вид:

$$a_{1i} = 1 - b_{1i}; \quad a_{2i} = b_{1i}; \quad a_{3i} = 0. \quad (10)$$

Для диффузии в неподвижной среде:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = D \frac{\partial^2 x}{\partial l^2} + \xi, \quad (11)$$

коэффициенты аппроксимирующего выражения (6) имеют следующий вид:

$$a_{1i} = 1 - 2b_{2i}; \quad a_{2i} = b_{2i}; \quad a_{3i} = b_{2i}. \quad (12)$$

Заметим, что во всех случаях коэффициенты (8), (10) и (12) в сумме равны единице. Это следует из свойства консервативности конечно-разностной схемы [2], в соответствии с которым конечно-разностная схема должна обеспечивать выполнение законов сохранения, представленных соответствующим дифференциальным уравнением. В частности, условия адекватности модели (7) при отсутствии изменений x , как по пространственным координатам, так и по времени, требуют выполнения баланса $M(x - a_1x - a_2x - a_3x) = M(\xi_i^{k+1}) = 0$. Математическое ожидание $M(x - [a_1 + a_2 + a_3]x)$ будет равно нулю при условии $a_1 + a_2 + a_3 = 1$.

Выражение (7) можно рассматривать как модель пространственно распределенного временного ряда в виде системы уравнений авторегрессионного типа, при условии представления его левой части в виде условного математического ожидания и измеримости x_i^k для всех значений i и k :

$$x_i^{k+1} = M(x_i^{k+1} | x_i^k, x_{i-1}^k, x_{i+1}^k) = a_{1i}x_i^k + a_{2i}x_{i-1}^k + a_{3i}x_{i+1}^k + \xi_i^{k+1}; \quad (13)$$

$$i = 2, \dots, n-1; \quad k = 0, 1, \dots$$

Система (13) допускает получение МНК-оценок своих коэффициентов: $\hat{a}_{1i}, \hat{a}_{2i}, \hat{a}_{3i}$ [3]. При этом следует соблюдать соответствие конечно-разностных схем экспериментальной статистики и схем аппроксимации.

Если такие оценки получены, то они должны соответствовать только одному из частных случаев (8), (10) или (12). Тогда эти равенства можно рассматривать как сис-



тему уравнений относительно коэффициентов b_{1i} и b_{2i} для каждого узла i разностной схемы. Например, для равенств (8) эта система примет вид:

$$1 - b_{1i} - 2b_{2i} = \hat{a}_{1i}; \quad (14.1)$$

$$b_{1i} + b_{2i} = \hat{a}_{2i}; \quad (14.2)$$

$$b_{2i} = \hat{a}_{3i}. \quad (14.3)$$

Последние два уравнения (14.2) и (14.3) позволяют найти оценки коэффициентов b_{1i} и b_{2i} , а первое уравнение (14.1), которое будем далее называть проверочным, можно использовать для структурной идентификации процессов исследуемого объекта. Если полученные в результате решения уравнений (14.2) и (14.3) значения коэффициентов b_{1i} и b_{2i} удовлетворяют (14.1), то моделируемому объекту адекватна модель (5). Иначе следует использовать для идентификации структуры системы уравнений, получаемые из равенств (10) или (12):

$$\begin{aligned} 1 - b_1 &= \hat{a}_1; \\ b_1 &= \hat{a}_2; \\ 0 &= \hat{a}_3. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} 1 - 2b_2 &= \hat{a}_1; \\ b_2 &= \hat{a}_2 = \hat{a}_3. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, процедура структурной идентификации сводится к выбору одной из систем (14) – (16), которой удовлетворяют оценки \hat{a} и которая укажет на искомую структуру.

Приведенный подход также позволяет определять в исследуемых объектах наличие источников или стоков. Будем рассматривать только два типа источников: стационарный источник в виде некоторой константы m и источник, изменяющийся во времени по линейному закону β_i .

В этом случае модель (13) принимает вид:

$$\begin{aligned} x_i^{k+1} &= m_i + a_{1i}x_i^k + a_{2i}x_{i-1}^k + a_{3i}x_{i+1}^k + \beta_i t + \xi_i^{k+1}; i = 2, \dots, n-1; k = 0, 1, \dots; \\ x_i^0 &= (x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0). \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнения для оценивания структуры остаются те же (14) – (16). Меняться будут только значения оцениваемых коэффициентов \hat{a} . Уравнение (17) можно рассматривать для частных случаев: наличия в каждом узле только стационарного источника m или наличия только источника с линейной динамикой.

Условием совместности системы уравнений (14) – (16) является выражение:

$$\hat{a}_{1i} + \hat{a}_{2i} + \hat{a}_{3i} = 1. \quad (18)$$



Условие (18) позволяет принять решение о возможности структурной идентификации до начала ее выполнения. Если условие (18) выполняется, то можно подбирать какой из систем (14) – (16) удовлетворяют полученные оценки \hat{a} .

Модель, позволяющая воспроизводить поведение i -й компоненты многомерного пространственно распределенного временного ряда, представляется как условное математическое ожидание или линейная регрессия вида

$$x_i^{k+1} = M(x_i^{k+1} | x_i^k, x_{i-1}^k, x_{i+1}^k) = \hat{a}_{1i}x_i^k + \hat{a}_{2i}x_{i-1}^k + \hat{a}_{3i}x_{i+1}^k, \quad (19)$$

$$i = 2, \dots, n-1; k = 0, 1, \dots$$

Модель (19) можно записать в матричной форме [4]:

$$X_{d \times 1}^{k+1} = A_{d \times s} \cdot X_{s \times 1}^k, \quad (20)$$

где d – количество узлов, в которых определяется модельное значение переменной x в момент времени $k+1$; s – количество узлов, в которых производится измерение переменной x в момент времени k .

Для $d = 3$ и $s = 5$ имеем

$$\begin{pmatrix} x_{i+1}^{k+1} \\ x_i^{k+1} \\ x_{i-1}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{3i} & \hat{a}_{1i} & \hat{a}_{2i} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{a}_{3i} & \hat{a}_{1i} & \hat{a}_{2i} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{a}_{3i} & \hat{a}_{1i} & \hat{a}_{2i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{i+2}^k \\ x_{i+1}^k \\ x_i^k \\ x_{i-1}^k \\ x_{i-2}^k \end{pmatrix}.$$

Следует отметить, что модель (20) отличается от приведенной формы векторной авторегрессии [5] видом и размерностью матрицы A .

Очевидно, что модель (20), по аналогии с векторной авторегрессией [5], описывает стационарные процессы, если корни ее характеристического уравнения находятся строго внутри единичной окружности. Также, по аналогии с авторегрессией, при наличии хотя бы одного корня на границе единичной окружности, распределенная модель (20) будет описывать нестационарное поведение случайных последовательностей. Для выяснения возможности использования модели (20) для описания нестационарных процессов преобразуем ее к аналогичному виду:

$$X_{s \times 1}^{k+1} = A_{s \times s} \cdot X_{s \times 1}^k, \quad (21)$$

для $d = 5$ и $s = 5$ имеем:

$$\begin{pmatrix} x_{i+2}^k \\ x_{i+1}^{k+1} \\ x_i^{k+1} \\ x_{i-1}^{k+1} \\ x_{i-2}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{a}_{3i} & \hat{a}_{1i} & \hat{a}_{2i} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{a}_{3i} & \hat{a}_{1i} & \hat{a}_{2i} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{a}_{3i} & \hat{a}_{1i} & \hat{a}_{2i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{i+2}^k \\ x_{i+1}^k \\ x_i^k \\ x_{i-1}^k \\ x_{i-2}^k \end{pmatrix}.$$



Поскольку корни характеристического полинома регрессии (21) представляют собой спектр матрицы $A_{s \times s}$, выпишем определитель $\det(A_{s \times s} - \lambda E)$, где E – единичная матрица. Выполняя последовательно разложение по элементам первой и второй строк, получим характеристический полином в виде:

$$[(a_{1i} - \lambda)^3 - 2(a_{1i} - \lambda)a_{3i}a_{2i}](1 - \lambda)^2 = 0. \quad (22)$$

Как видно из (22), характеристический полином матрицы $A_{s \times s}$ имеет, по крайней мере, один единичный корень, а, следовательно, регрессия (20) может описывать нестационарный процесс.

Характерный вид матрицы $A_{s \times s}$ сохраняется для любой размерности s , что гарантирует постоянное наличие единицы в спектре такой матрицы, а, следовательно, модель (20) может описывать нестационарные процессы [6 – 8].

2. Проверка гипотез «единичного корня» и тождественности проверочных уравнений. Поскольку оценки \hat{a} случайные величины, проверку условия (18) следует проводить как проверку соответствующей статистической гипотезы. Это относится и к проверочным уравнениям, которым должны удовлетворять вычисленные коэффициенты b_1 и b_2 .

Для проверки гипотезы «единичного корня» необходимо записать уравнения (8) и (17) в удобном для тестирования виде.

В модели (8) вычтем из правой и левой частей x_i^k , получим:

$$\Delta x_i^{k+1} - x_i^k = a_{1i}x_i^k - x_i^k + a_{2i}x_{i-1}^k + a_{3i}x_{i+1}^k + \xi_i^{k+1},$$

или, что тоже самое:

$$\Delta x_i^{k+1} = (a_{1i} - 1)x_i^k + a_{2i}x_{i-1}^k + a_{3i}x_{i+1}^k + \xi_i^{k+1}. \quad (23)$$

Добавим и вычтем в правой части (23) $a_{2i}x_i^k, a_{3i}x_i^k$ и после простых преобразований получим:

$$\Delta x_i^{k+1} = \alpha_i x_i^k - a_{2i} \delta x_i^k + a_{3i} \delta x_{i+1}^k + \xi_i^{k+1}, \quad (24)$$

где $\Delta x_i^{k+1} = x_i^{k+1} - x_i^k$; $\alpha_i = (a_{1i} + a_{2i} + a_{3i} - 1)$; $\delta x_i^k = x_i^k - x_{i-1}^k$; $\delta x_{i+1}^k = x_{i+1}^k - x_i^k$.

По аналогии с (24) можно получить преобразованную расширенную модель с источниками:

$$\Delta x_i^{k+1} = m + \alpha x_i^k - a_2 \delta x_i^k + a_3 \delta x_{i+1}^k + \beta t + \xi_i^{k+1}. \quad (25)$$

Процедуру проверки гипотезы «единичного корня» обычно проводят с использованием критерия Дикки-Фуллера [9], разработанного применительно к моделям типа ARMA [3, 10 – 11]. Основное отличие статистики Дикки-Фуллера от обычной t -статистики заключается в увеличении критических значений квантилей и зависимости этих значений от вида уравнения [11]. Для многомерных моделей типа (24) и (25) такой статистики мы не обнаружили. Поэтому проверку гипотезы «единичного корня»



будем проводить с использованием статистики Дикки-Фуллера, фрагменты которой для $n = 100\%$ и 5% уровня значимости приведены в таблице 1.

Процедура проверки начинается с анализа наиболее полной модели (25), включающей в себя постоянный и линейный источники. Проверяется гипотеза $H_0 : \alpha_i = 0$. Если эта гипотеза на заданном уровне значимости отвергается, то распределенную модель нельзя использовать для анализа поведения стохастического поля. Если гипотеза не отвергается, то для полной модели проверяется значимость оценок m_i и β_i . Если обе оценки оказались значимыми, можно переходить к проверке уравнений (14) – (16). Иначе следует рассматривать либо модель (25) с одним из источников, либо модель без источников (24), начиная с проверки гипотезы $H_0 : \alpha_i = 0$. Если эта гипотеза во всех случаях отвергается, то распределенную модель нельзя использовать для анализа поведения стохастического поля.

Таблица 1 – Критические значения статистик Дикки-Фуллера для 95% доверительного интервала

Модель	Гипотеза	Статистика критерия	Критические значения
			95%
$\Delta x_i = m + \alpha x_{i-1} + \beta t + \xi_i$	$\alpha = 0$ $m = 0$ при $\alpha = 0$ $\beta = 0$ при $\alpha = 0$	τ_τ τ_m τ_β	-3,45 3,11 2,79
$\Delta x_i = m + \alpha x_{i-1} + \xi_i$	$\alpha = 0$ $m = 0$ при $\alpha = 0$	τ_τ τ_m	-2,89 2,54
$\Delta x_i = \alpha x_{i-1} + \xi_i$	$\alpha = 0$	τ	-1,95

Если гипотеза «единичного корня» принимается хотя бы в одном случае, следует переходить к проверке уравнений (14) – (16). Решение этих уравнений и анализ равенства частей проверочного уравнения также выполняются с проверкой соответствующих статистических гипотез на основе t -отношения $t_y = \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y}$.

Принадлежность двух значений a_i и a_j одной генеральной совокупности, т.е. гипотеза $H_0 : a_i - a_j = 0$ проверяется

с использованием t -отношения $t_{ai-aj} = \frac{a_i - a_j}{\sigma_{ai-aj}}$, где $\sigma_{ai-aj} = \sqrt{\sigma_{ai}^2 + \sigma_{aj}^2}$.

3. Экспериментальное исследование предложенной методики. Для проверки методики были проведены экспериментальные исследования на данных, предоставленных сайтом «реанализа» [11]. Использовались данные в виде температурных полей атмосферы на различных геопотенциальных уровнях. Рассматривались суточные измерения температуры в течение 2008 года со значением геопотенциала 1000 ГПа, что соответствует приземной поверхности и со значением 300 ГПа, что соответствует высоте 10 км.

Температура бралась в одном узле регулярной сетки с одинаковым шагом по долготе и широте $2,5^\circ$, с координатами $7,5^\circ$ восточной долготы и 35° северной широты. Временные ряды в данном узле на разных высотах от поверхности земли представлены на рисунке 1.

Двумерная регрессионная модель примет вид:



$$\begin{aligned}
 x_{ij}^{k+1} &= M(x_{ij}^{k+1} | x_{ij}^k, x_{i-1,j}^k, x_{i+1,j}^k, x_{i,j-1}^k, x_{i,j+1}^k) = \\
 &= \hat{a}_{1ij} x_{ij}^k + \hat{a}_{2ij} x_{i-1,j}^k + \hat{a}_{3ij} x_{i+1,j}^k + \hat{a}_{4ij} x_{i,j-1}^k + \hat{a}_{5ij} x_{i,j+1}^k.
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

Поскольку рассматривался единственный узел, индексацию коэффициентов \hat{a} , указывающую на принадлежность конкретному узлу далее не использовали.

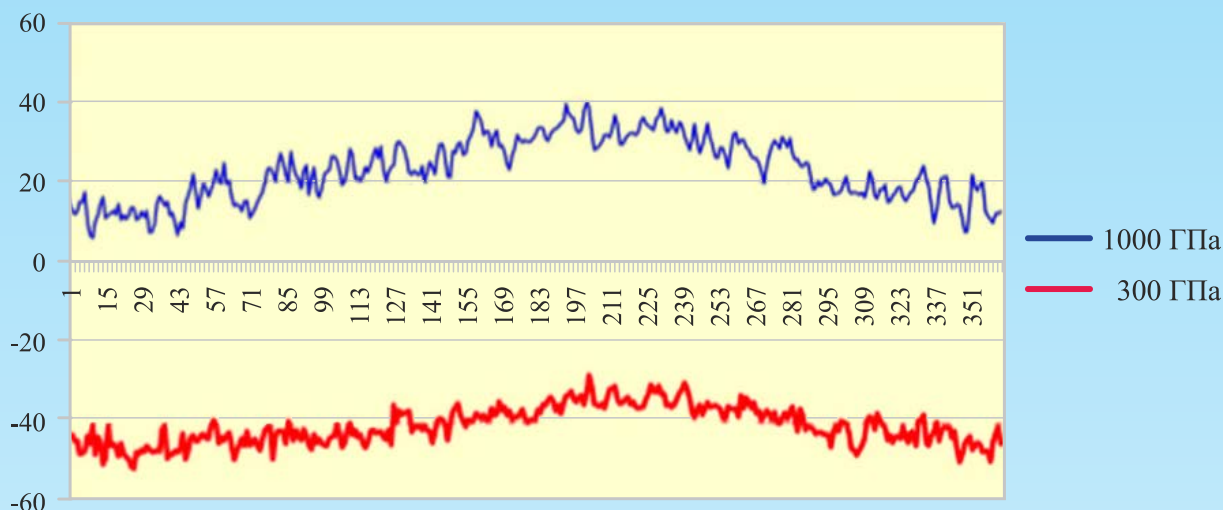


Рисунок 1 – Временные ряды ежедневных температур в приземном (1000ГПа) слое атмосферы и на высоте 10 км (300ГПа) за 2008 год

В двумерном случае система уравнений, аналогичная системе (14) – (16) для одномерного случая, получена:

для процессов конвективного переноса и диффузии в виде:

$$\left. \begin{aligned}
 1 - b_1 - b_2 - 4b_3 &= \hat{a}_1; \\
 b_1 + b_3 &= \hat{a}_2; \\
 b_1 + b_3 &= \hat{a}_2;
 \end{aligned} \right\}
 \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
 b_2 + b_3 &= \hat{a}_4; \\
 b_3 &= \hat{a}_5;
 \end{aligned}$$

для процесса конвективного переноса в виде:

$$\left. \begin{aligned}
 1 - b_1 - b_2 &= \hat{a}_1; \\
 b_1 &= \hat{a}_2; \\
 0 &= \hat{a}_3; \\
 b_2 &= \hat{a}_4; \\
 0 &= \hat{a}_5;
 \end{aligned} \right\}
 \tag{28}$$

для процесса диффузии в виде:



$$\left. \begin{aligned} 1 - 4b_3 &= \hat{a}_1; \\ b_3 &= \hat{a}_2; \\ b_3 &= \hat{a}_3; \\ b_3 &= \hat{a}_4; \\ b_3 &= \hat{a}_5. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

В соответствии с методикой раздела 2, сначала анализировалась модель (25). Результаты идентификации представлены в таблице 2.

Таблица 2 – МНК-оценки \hat{a}_i определялись для трех моделей

	Вид модели	\hat{a} / t_α	\hat{m} / t_m	$\hat{\beta} / t_\beta$	\hat{a}_1 / t_{a1}	\hat{a}_2 / t_{a2}	\hat{a}_3 / t_{a3}	\hat{a}_4 / t_{a4}	\hat{a}_5 / t_{a5}
1000 ГПа	Полная модель	0,061 1,47	-0,972 1,57	0,002 -1,20	-1,102 -2,61	1,360 5,94	0,342 1,39	0,198 2,12	0,262 1,82
	Модель без ист.	-0,009 -0,72	–	–	-0,599 -1,93	1,156 5,85	0,105 0,51	0,169 1,85	0,160 1,21
300 ГПа	Полная модель	-0,057 -2,32	-2,333 -2,36	0,001 0,93	-3,139 -6,09	1,493 5,25	0,970 3,42	0,781 5,37	0,838 6,13
	Модель без ист.	-3*10 ⁻⁶ -0,0008	–	–	-3,384 -6,66	1,608 5,70	1,047 3,69	0,840 5,82	0,889 6,55

В таблице 2 приняты обозначения: верхнее число каждой ячейки – значение МНК-оценки параметров, нижнее число – расчётное значение t -статистики.

Сравнивая расчётные значения t -статистик с их критическими значениями в таблице 1, можно сделать следующие выводы:

- во всех моделях гипотеза «единичного корня» не может быть отвергнута;
- статистически значимые источники в моделях не присутствуют.

Дальнейший анализ будем вести только с моделями без источников. Прежде всего, следует отметить, что критерий «единичного корня» для обеих моделей не отвергается: для модели приземного слоя (1000ГПа) $t_\alpha = -0,72$ больше критического значения $-1,95$ из таблицы 1; для модели на высоте 10 км (300 ГПа) $t_\alpha = -0,0008$, т.е. больше критического значения $-1,95$. Следовательно, в обоих случаях гипотеза $H_0 : \alpha = 0$ не отвергается. На следующем этапе анализа результатов проведенного эксперимента проверяется, какой из систем (27) – (29) удовлетворяют найденные оценки \hat{a}_i .

Анализ начнём с модели без источников приземного (1000 ГПа) слоя атмосферы. Обратим внимание, что параметры \hat{a}_3 и \hat{a}_5 статистически не значимы ($t_{a3} = 0,51; t_{a5} = 1,21$). Оставшиеся оценки параметров этой строки в таблице 2 могут удовлетворять только системе (28). Чтобы окончательно убедиться в этом, проверим первое уравнение этой системы: $1 - 1,156 - 0,169 = -0,599$ или $-0,325 + 0,599 = 0,274$. Стандартная ошибка величины рассогласования частей уравнения очевидно больше стандартной ошибки полученной оценки $\hat{a}_1 - \sigma_{a1} = (-0,599)/(-1,93) = 0,31$. Но даже в этом случае t -отношение ($t = \frac{0,274}{0,31} = 0,88$) показывает, что можно принять на 5% уровне

значимости статистическую эквивалентность левой и правой частей прочного уравнения системы (28).



Проведенная структурная идентификация показывает, что в приземном слое атмосферы на изменения температуры преобладающее воздействие оказывают процессы конвективного переноса или просто движения воздушных масс.

Рассмотрим по той же методике атмосферный слой на высоте 10 км (300 ГПа). Здесь модель без источников имеет отличные от нуля, статистически значимые оценки для всех своих параметров a_i . По этой причине система (28), очевидно, выпадает из рассмотрения.

Анализ систем (27) и (29) показывает необходимость равенства параметров $a_3 = a_5$, которые, в соответствии с таблицей 2 принимают значения $\hat{a}_3 = 1,047$ и $\hat{a}_5 = 0,889$. Можно считать, что они на 5% уровне значимости принадлежат одной генеральной совокупности, так как соответствующее t -отношение имеет вид $t = \frac{1,047 - 0,889}{\sqrt{(0,28)^2 + (0,14)^2}} = 0,31$. В таком случае оценку b_3 следует рассчитывать как сред-

нее оценок \hat{a}_3 и \hat{a}_5 , т.е. $b_3 = 0,944$. Оценка b_2 находится из четвертого уравнения системы (27), $b_2 = -0,104$. Оценка b_1 находится из второго уравнения системы (27), $b_1 = 0,664$. Окончательно первое (проверочное) уравнение системы (27) приводит к соотношениям $1 - b_1 - b_2 - 4b_3 = -3,336$; $\hat{a}_1 = -3,384$. Разница левой и правой части уравнения составляет $-0,048$. Стандартная ошибка этой разницы очевидно больше стандартной ошибки оценки \hat{a}_1 , равной $\sigma_{a1} = 0,51$. Даже в этом случае t -отношение принимает вид $t = \frac{-0,048}{0,51} = 0,94$. Следовательно, на 5% уровне значимости полученные оценки удов-

летворяют проверочному уравнению системы (27). Гипотеза о влиянии на температуру слоя атмосферы на высоте 10 км процессов конвективного переноса и диффузии принимается.

Несмотря на такой вывод, необходимо проверить и гипотезу о наличии на высоте 10 км только процессов диффузии, т.е. проанализировать совместность уравнений системы (29). Эта система требует, чтобы оценки $\hat{a}_2 = 1,608$; $\hat{a}_3 = 1,047$; $\hat{a}_4 = 0,840$; $\hat{a}_5 = 0,889$ рассматривались, как значения одной случайной величины b_3 . Максимальная разница между значениями оценок составляет $\hat{a}_2 - \hat{a}_4 = 0,768$. Стандартная ошибка разницы составляет $0,28 + 0,14 = 0,42$. Расчётное значение t -отношения составляет $0,768/0,42 = 1,83$. Судя по данным таблицы 1, гипотеза о равенстве максимальной разницы нулю может быть принята. Следовательно, будем считать, что полученные оценки можно рассматривать как реализации одной случайной величины. Тогда можно принять среднее значение $b_3 = (\hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_4 + \hat{a}_5) / 4 = 1,096$. Проверочное уравнение дает результат $1 - 4b_3 = -3,384$. $\hat{a}_1 = -3,384$. Гипотезу о влиянии на температуру верхнего слоя атмосферы только процессов диффузии можно принять.

Полученный для верхнего слоя атмосферы результат можно интерпретировать следующим образом. На температуру верхнего слоя атмосферы оказывают влияние и процессы конвективного переноса, и процессы диффузии. Однако процессы диффузии влияют более значимо, так как допустимо только их влияние, о чём свидетельствует анализ уравнений системы (29). Такой результат хорошо согласуется с известными представлениями о термодинамических процессах в атмосфере.

Выводы. Проведенные исследования показали возможность структурной и параметрической идентификации моделей процессов конвективного переноса и диффузии на основе анализа многомерных временных рядов нелинейной динамики поля скаляр-



ной величины. Апробация предложенного подхода к моделированию динамики температуры атмосферы с помощью многомерных временных рядов температуры показала хорошее соответствие результатов модельного анализа и известных представлений о термодинамике атмосферы. В частности, для атмосферных процессов появляется принципиальная возможность новых подходов к количественной оценке таких важных полевых характеристик, как дивергенция, вихрь, циркуляция скорости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матвеев М.Г. Комбинированная прогностическая модель нестационарного многомерного временного ряда для построения пространственного профиля атмосферной температуры // Информационные технологии. 2016. Т. 22. № 2. С. 89–94.
2. Мареев В.В., Станкова Е.Н. Основы методов конечных разностей. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2012. 64 с.
3. Носко В.Н. Эконометрика: учебник. М.: Изд. дом «Дело» РАНХ иГС, 2011. Кн. 2. Ч. 3, 4. 576 с.
4. Patterson K. An Introduction to Applied Econometrics: A Time Series Approach // Palgrave. 2000. 23 p.
5. Sebastian Fossati Multivariate Time Series [Electronic resource] / University of Alberta: Eric Zivot's time series notes. URL: <http://www.faculty.washington.edu/ezivot>
6. Ruey S. Tsay Multivariate Time Series Analysis in R // Proceedings of the Finance Conference. Booth School of Business University of Chicago. May 2013. P. 101–105.
7. Гребенюк Е.А. Методы анализа нестационарных временных рядов с неявными изменениями свойств // Автоматика и телемеханика. 2005. № 12. С. 72.
8. Канторович Г.Г. Анализ временных рядов // Экономический журнал ВШЭ. – 2002. № 3. С. 379–401.
9. Dickey D.A., Fuller W.A. Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root // Journal of the American Statistical Association. 1979. No. 74. P. 427–431.
10. Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. М.: Финансы и статистика, 2003. 192 с.
11. NCEP-DOE AMIP-II Reanalysis [Electronic resource]. URL: <http://www.cdc.noaa.gov/cdc/data.ncep.reanalysis2.html>
12. Балаев А.И. Анализ многомерных временных рядов финансовых доходностей: сравнение различных подходов к моделированию тяжелых хвостов // Экономический журнал ВШЭ. 2013. Т. 17. № 2. С. 256–282.
13. Гитис В.Г. Основы пространственно-временного прогнозирования в геоинформатике. М.: Физматлит, 2004. 256 с.
14. Панкрушин В.К. Математическое моделирование и идентификация геодинамических систем. Новосибирск: СГГА, 2002. 424 с.

BIBLIOGRAPHY

1. Matveev M.G. Combined forecasting model of non-stationary multivariate time series for the construction of the spatial profile of atmospheric temperature // Information technologies. 2016. Vol. 22. No. 2. P. 89–94.
2. Mareev V.V., Stankova E.N. Fundamentals of finite difference methods. SPb.: Publishing House SPbGU, 2012. 64 p.



3. Nosko V.N. Econometrics: textbook / V.N. Nosko. M.: Publishing House «Delo» RANH iGCI, 2011. Bk. 2. Pt. 3, 4. 576 p.
4. Patterson K. An Introduction to Applied Econometrics: A Time Series Approach // Palgrave. 2000. 23 p.
5. Sebastian Fossati Multivariate Time Series [Electronic resource] // University of Alberta: Eric Zivot's time series notes. URL: <http://www.faculty.washington.edu/ezivot>
6. Ruey S. Tsay Multivariate Time Series Analysis in R / S. Ruey // Proceedings of the Finance Conference. Booth School of Business University of Chicago. May 2013. P. 101–105.
7. Grebenyuk E.A. Methods of analysis of non-stationary time series-to-day changes in the properties // Automation and Remote Control. 2005. No. 12. P. 72
8. Kantorovich G.G. Time series analysis of HSE // Economic Journal. 2002. No. 3. P. 379–401.
9. Dickey D.A., Fuller W.A. Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root // Journal of the American Statistical Association. 1979. No. 74. P. 427–431.
10. Lukashin Y.P. Adaptive methods of short-term forecasting of time series. M.: Finance and Statistics, 2003. 192 p.
11. NCEP-DOE AMIP-II Reanalysis [Electronic resource]. URL: <http://www.cdc.noaa.gov/cdc/data.ncep.reanalysis2.html>
12. Balaev, A.I. Analysis of multivariate time series of financial returns: a comparison of different approaches to the modeling of heavy tails // the HSE Economic Journal. 2013. Vol. 17. No. 2. P. 256–282.
13. Gitis V.G. Fundamentals of space-time forecasting in Geoinformatics. M.: Fizmatlit, 2004. 256 p.
14. Pankrushina V.K. Mathematical modeling and identification of geodynamic systems. Novosibirsk: SGGA, 2002. 424 p.

© Матвеев М.Г., Сирота Е.А., Приходько И.В., Кузнецов С.А. 2017

Матвеев Михаил Григорьевич, доктор технических наук, профессор, старший научный сотрудник научно-исследовательского отдела научно-исследовательского управления научно-исследовательского центра (проблем применения, обеспечения и управления авиацией Военно-воздушных сил), Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А, vaiu@mil.ru

Сирота Екатерина Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент, научный сотрудник научно-исследовательского отдела научно-исследовательского управления научно-исследовательского центра (проблем применения, обеспечения и управления авиацией Военно-воздушных сил), Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А, vaiu@mil.ru

Приходько Инна Владимировна, научный сотрудник научно-исследовательского отдела научно-исследовательского управления научно-исследовательского центра (проблем применения, обеспечения и управления авиацией Военно-воздушных сил), Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А, vaiu@mil.ru

Кузнецов Станислав Александрович, младший научный сотрудник научно-исследовательского отдела научно-исследовательского управления научно-исследовательского центра (проблем применения, обеспечения и управления авиацией Военно-воздушных сил), Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А, vaiu@mil.ru